Проф. Г. Шубертъ

Математическія Развлеченія и Игры

MATHESIS

ОДЕССА 1911

HERMANN SCHUBERT

Математическія развлеченія и игры

http://mathesis.ru

http://mathesis.ru

Проф. Г. ШУБЕРТЪ

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ РАЗВЛЕЧЕНІЯ и ИГРЫ

переводъ съ 3-го нѣмецкаго изданія
І. Л. ЛЕВИНТОВА
подъ редакціей и съ добавленіями
„Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“

http://mathesis.ru

ОДЕССА 1911.

Типографія Л. ШУТАКА. Одесса, Троицкая 27.

http://mathesis.ru

Ludendo discimus

Leibnitz.

http://mathesis.ru

http://mathesis.ru

ОТЪ РЕДАКЦІИ.

Книга Шуберта „Mathematische Mussestunden“ предполагаетъ только весьма элементарныя свѣдѣнія по математикѣ со стороны читателя, и потому Шубертъ почти нигдѣ не даетъ законченной математической обработки разсматриваемыхъ въ книгѣ задачъ. Нѣкоторыя изъ нихъ допускаютъ, однако, совершенно законченную, строгую и вмѣстѣ съ тѣмъ вполнѣ элементарную обработку. Таковы, напримѣръ, задачи о цѣпяхъ домино, о гиряхъ, о переливаніяхъ и другія. Редакція сочла полезнымъ снабдить русскій переводъ добавленіями, содержащими строгую элементарную обработку такихъ вопросовъ, и примѣчаніями, уясняющими то или другое мѣсто текста книги. Все это дано въ концѣ книги.

http://mathesis.ru

http://mathesis.ru

Предисловіе къ первому нѣмецкому изданію.

Предлагаемый сборникъ требуетъ отъ читателя знакомства лишь съ первоначальными элементами ариѳметики. Какъ въ сборникахъ Люка [1]) и Болла [2]), здѣсь представлены въ историко-критическомъ изложеніи важнѣйшія запутанныя игры и задачи математической природы, которыя могутъ служить для развлеченія. Хотя авторъ многое заимствовалъ изъ сборниковъ Люка и Болла, но въ большинствѣ содержащихся въ книгѣ вопросовъ авторъ пользовался своими собственными изслѣдованіями. Изъ книгъ съ аналогичнымъ содержаніемъ, относящихся къ болѣе давнему времени, слѣдуетъ назвать на первомъ мѣстѣ книгу Баше де Мезирьяка [3]). Раньше Баше математическія развле-

[1]) Edouard Lucas, «Récréations mathématiques», Paris 1882. Кромѣ того: Lucas, «L'Arithmétique amusante», Paris 1895 (издано послѣ смерти автора H. Delannoy, C. A. Laisant и E. Lemoine).

[2]) W. W. Rouse Ball, «Mathematical recreations and problems of past and present times», London 1892.

[3]) Bachet de Méziriac. «Problesmes plaisans et délectables qui se font par les nombres». Первое изданіе: Paris 1612; второе изданіе: Lyon 1624; третье и четвертое изданія, улучшенныя и дополненныя Лабономъ (Labosne): Paris 1874 и 1879.

http://rcsl.ru

ченія разрабатывались Карданомъ[1]) и Тарталья[2]), а послѣ Баше—Оутредомъ[3]) и Озанамомъ[4]). Появившіяся въ XIX столѣтіи въ Германіи книги Монтага[5]), Миттенцвея[6]) и др. содержатъ, правда, много занимательныхъ задачъ, но не даютъ математической критики ихъ. Лишь статьи[7]), опубликованныя авторомъ этой книги въ журналѣ „Naturwissenschaftliche Wochenschrift“ за 1893—1895 г.г. подъ заглавіемъ „Mathemathische Spielereien“, даютъ уже нѣкоторую математическую критику, хотя и не очень глубокую, содержащихся въ нихъ головоломокъ.

Гамбургъ, ноябрь 1897 г. ГЕРМАНЪ ШУБЕРТЪ.

---

[1]) Cardano «De subtilitate libri XX», Nürnberg 1550

[2]) Tartaglia, «Quesiti et inventioni diverse», Venetia 1554; «Trattato de numeri e misure», Venetia 1556; Opere, Venetia 1606.

[3]) Oughtred, «Mathematical recreations» London 1653.

[4]) Ozanam, «Récréations mathématiques et physiques», Paris 1694; вышло множество дополненныхъ и улучшенныхъ изданій.

[5]) Montag, «Die Wunder der Arithmetik», Leipzig.

[6]) Mittenzwey, «Mathematische Kurzweil», 3-е изданіе, Leipzig 1895.

[7]) Эти статьи изданы также въ видѣ отдѣльной книжки подъ названіемъ: «Zwölf Geduldspiele», Berlin 1895 (нынѣ издательство Göschen, Leipzig).

http://mathesis.ru

Предисловіе къ второму нѣмецкому изданію.

Уже въ 1899 г. я приготовилъ новое б о л ь ш о е трехтомное изданіе моей книги „Математическія развлеченія“, которая появилась впервые въ 1898 г.; новое изданіе книги, вышедшее въ свѣтъ въ 1900 г., имѣло втрое большій объемъ, чѣмъ первоначальное изданіе. Хотя это большое изданіе нашло себѣ многихъ друзей, но высказывались также пожеланія, чтобы наряду съ большимъ изданіемъ не выходило изъ обращенія и малое. Согласно этому, м а л о е изданіе, которое появилось въ 1898 г. и было распродано, выходитъ теперь вторично безъ существенныхъ добавленій.

Къ литературѣ родственнаго содержанія, приведенной въ предисловіи къ первому изданію, мы должны теперь присоединить еще двѣ книги. Во-первыхъ, W. Grosse, „Unterhaltende Probleme und Spiele“, Leipzig, 1897. Эта книга появилась всего за нѣсколько недѣль до выхода перваго изданія моихъ „Математическихъ развлеченій“, и поэтому не могла быть упомянута въ немъ; авторъ ея приводитъ многое изъ того, что еще раньше было опубликовано имъ въ „Naturwissenschafliche Wochenschrift“, но даетъ также не мало новаго и интереснаго. Вторая книга

математически глубже, чѣмъ книга Гроссе и моя. Она написана математикомъ Аренсомъ (W. Ahrens) и озаглавлена „Mathematische Unterhaltungen und Spiele“, Leipzig, 1901. Въ третьихъ, упомянемъ еще, что на долю „математическихъ игръ“ выпала честь быть обработанными въ большой „Энциклопедіи математическихъ наукъ“ („Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“), конечно, всего лишь на 14 печатныхъ страницахъ; авторомъ статьи въ „Энциклопедіи“ является только что упомянутый Аренсъ. Пусть и это новое малое изданіе математическихъ развлеченій найдетъ себѣ друзей!

Гамбургъ, 18 августа 1903 г. **Г. ШУБЕРТЪ.**

---

http://mathesis.ru

ОГЛАВЛЕНІЕ.

стр.

I отдѣлъ: Задачи, относящіяся къ числамъ. XV

§ 1 Отгадываніе задуманныхъ чиселъ 1
§ 2. Предугадываніе полученныхъ результатовъ . 16
§ 3. Замѣчательные ряды цифръ 19
§ 4. Весьма большія числа 32
§ 5. Отгадываніе числа очковъ прикрытыхъ картъ 51
§ 6. Задачи на переливаніе 57
§ 7. Повѣрка при помощи девятки и фокусы съ девяткой 80
§ 8. Фокусы съ костями 86
§ 9. Цѣпи домино 90
§ 10. Представленіе всѣхъ чиселъ въ видѣ суммы степеней числа 2 96
§ 11. Задача Баше о гиряхъ 102
§ 12. Отгадываніе владѣльцевъ различныхъ вещей 106
§ 13. Игра двухъ лицъ, которыя поочередно прибавляютъ 112
§ 14. Совершенныя числа 116
§ 15. Пиѳагоровы и Героновы числа 122
§ 16. Затрудненное дѣленіе 136
§ 17. Софизмы 145

II отдѣлъ: Задачи, относящіяся къ расположенію . 157

§ 18. О 15 христіанахъ и 15 туркахъ 159
§ 19. Магическіе квадраты 177
§ 20. Ходъ коня 215
§ 21. Такенъ или игра въ пятнадцать 258

http://mat-esse.ru

стр.
§ 22. Вѣчный календарь для дней недѣли и Пасхи 288
§ 23. Вѣчный календарь для новолуній и полнолуній . 294
§ 24. Эйлеровы странствованія 300
§ 25. Гамильтоновы круговыя поѣздки 311
Примѣчанія и добавленія: 331
Къ задачѣ о переливаніяхъ 334
Цѣпи домино 339
О гиряхъ 341
О непрерывномъ вычерчиваніи фигуръ 349

Опечатка.

Страница 121, строка 7-ая снизу, въ лѣвой части равенства должно быть

$$(1 + 2 + 4)(1 + 71) - 284$$

http://mathesis.ru

I отдѣлъ.

Задачи, относящіяся къ числамъ.

http://mathesis.ru

http://mathesis.ru

§ 1.

Отгадываніе задуманныхъ чиселъ.

Чтобы отгадать задуманное число, мы предлагаемъ выполнить надъ нимъ какія-либо дѣйствія. Затѣмъ мы просимъ сообщить намъ полученный результатъ; съ помощью него мы можемъ найти задуманное число, выразивъ выполненныя дѣйствія посредствомъ математическихъ знаковъ и рѣшивъ уравненіе. Въ болѣе простыхъ случаяхъ, когда непосредственно надъ самимъ задуманнымъ числомъ указанная операція совершается только **одинъ разъ** вначалѣ, мы для рѣшенія уравненія поступаемъ съ полученнымъ результатомъ обратно тому, какъ поступали съ числомъ, т. е. мы обращаемъ какъ послѣдовательность дѣйствій, такъ и самыя дѣйствія,—напримѣръ, дѣлаемъ вычитаніе вмѣсто сложенія, умноженіе вмѣсто дѣленія. Однако же съ помощью ариѳметическихъ преобразованій мы можемъ, зная результатъ, вычислить задуманное чи-

сло болѣе короткимъ путемъ. Приведемъ примѣры.

1. Задуманное число увеличиваютъ на 5, сумму умножаютъ на 3 и отъ произведенія отнимаютъ 7. Тогда, узнавши полученный результатъ, мы уменьшаемъ его на 8; третья часть полученной разности равна искомому числу. Дѣйствительно, изъ уравненія $(x + 5) \cdot 3 - 7 = p$ мы находимъ послѣдовательно: $3x + 15 - 7 = p$, или $3x + 8 = p$, или $3x = p - 8$, или $x = (p - 8) : 3$. Если, напримѣръ, задумано было число 4, то полученный результатъ былъ равенъ 20, откуда задуманное число получится съ помощью такого вычисленія: $20 - 8 = 12$; $12 : 3 = 4$.

2. Задуманное число умножается на 6, изъ произведенія вычитается 5, разность умножается на 3, произведеніе увеличивается на 1, сумма дѣлится на два и полученное частное увеличивается на 7. Тогда девятая часть окончательнаго результата равна задуманному числу. Дѣйствительно, выраженіе $[(6x - 5) \cdot 3 + 1] : 2 + 7$ мы можемъ представить въ такомъ видѣ: $(18x - 15 + 1) : 2 + 7$, или $(18x - 14) : 2 + 7$, или $9x - 7 + 7$, или $9x$. Такимъ образомъ, полученный результатъ равенъ $9x$; слѣдовательно, задуманное число равно девятой части результата.

— Когда по полученному результату опредѣляютъ задуманное число, то можно также использовать то обстоятельство, что при нашемъ способѣ изобра-

женія числа съ помощью цифръ, мы пишемъ число въ видѣ суммы чиселъ, которыя соотвѣтственно суть кратныя чиселъ 1, 10, 100 и т. д., какъ это видно изъ слѣдующихъ двухъ примѣровъ:

3. Задуманное число умножается на два, къ произведенію прибавляется 3, сумма умножается на 5 и изъ полученнаго такимъ образомъ произведенія вычитывается 11. Тогда нужно лишь отбросить четверку, которой заканчивается полученный результатъ, и мы найдемъ задуманное число. Напримѣръ, если задумано было число 7, то, выполняя предписанныя дѣйствія, мы получимъ послѣдовательно числа 14, 17, 85, 74. Изъ полученнаго въ результатѣ числа 74 мы узнаемъ задуманное число 7. Этотъ пріемъ основанъ на преобразованіи выраженія $(2x + 3) . 5 — 11$ къ виду $10x + 15 — 11$, или $10x + 4$.

4. Задуманное число умножаютъ на 3, къ произведенію прибавляютъ 25 и полученная сумма умножается на 4. Тогда нужно лишь уменьшить результатъ на 100 и взять 12-ую часть найденной разности, чтобы получить задуманное число. Дѣйствительно, выраженіе $(3x + 25) . 4$ приводитъ къ уравненію $12x + 100 = p$, откуда $12x = p — 100$, или $x = (p — 100) : 12$.

Подобныя задачи на угадываніе чиселъ мы находимъ уже въ классическомъ сочиненіи Баше „Problesmes

plaisans et délectables“, впервые появившемся въ 1612 г. Эти задачи не представляютъ особеннаго интереса и отчасти даже заключаютъ въ себѣ ненужныя усложненія: все же въ виду того, что со времени своего появленія онѣ постоянно предлагаются и тѣмъ самымъ пріобрѣли нѣкоторый историческій интересъ, мы приведемъ здѣсь три такія задачи:

5. Предлагаютъ кому-нибудь задумать число, умножить его на 3 и взять половину полученнаго числа, если дѣленіе на два совершается безъ остатка. Если же получается остатокъ, то прежде, чѣмъ взять половину произведенія, къ послѣднему прибавляютъ 1. Полученную половину умножаютъ на 3 и затѣмъ предлагаютъ сообщить результатъ. Дѣля его на 9 и умножая на 2 полученную при дѣленіи цѣлую часть частнаго, находятъ задуманное число, если при первоначальномъ дѣленіи на 2 остатка не было; въ противномъ случаѣ полученный результатъ на 1 меньше задуманнаго числа. Обосновывая этотъ пріемъ, слѣдуетъ различать два случая: 1) когда было задумано четное число и 2) когда было задумано нечетное число.

Въ первомъ случаѣ мы можемъ обозначить задуманное число черезъ $2n$, гдѣ n есть нѣкоторое цѣлое число. Тогда, выполняя предписанныя дѣйствія, мы получимъ послѣдовательно:

$2n \cdot 3 = 6n$, $6n : 2 = 3n$, $3n \cdot 3 = 9n$. Число $9n$, такимъ образомъ, равно результату, который намъ сообщаютъ. Мы вычисляемъ про себя далѣе: $9n : 9 = n$; $n \cdot 2 = 2n$; послѣднее число и есть задуманное. Если же задумано было нечетное число, то мы можемъ обозначить его черезъ $2n + 1$, гдѣ n есть нѣкоторое цѣлое число. Предписанныя дѣйствія даютъ послѣдовательно: $(2n + 1) \cdot 3 = 6n + 3$, $6n + 3 + 1 = 6n + 4$, $(6n + 4) : 2 = 3n + 2$, $(3n + 2) \cdot 3 = 9n + 6$. Мы узнаемъ, такимъ образомъ, число $9n + 6$. Дѣля его на 9, мы получимъ число n, какъ цѣлую часть частнаго этого дѣленія. Умножая эту часть на 2 и прибавивъ 1, мы найдемъ задуманное число $2n + 1$.

— Въ слѣдующей задачѣ Баше необходимо различать четыре случая, въ зависимости отъ того, даетъ ли задуманное число при дѣленіи на 4 въ остаткѣ 0, или 1, или 2, или 3.

6. Предлагаемъ задумать число и утроить его. Смотря по тому, представляетъ ли собою полученный результатъ четное число или нечетное, мы предлагаемъ взять либо его половину, либо половину числа, превышающаго полученный результатъ на 1. Полученную половину мы снова предлагаемъ утроить и, сообразно съ тѣмъ, будетъ ли это число четнымъ или нечетнымъ, взять либо его половину, либо половину числа, превышающаго его на 1. Затѣмъ мы предлагаемъ назвать намъ цѣлое число единицъ, которое

получется при дѣленіи вышеуказанной половины на 9. Чтобы получить задуманное число, названное число надо умножить на 4; къ послѣднему произведенію нужно либо ничего не прибавлять, либо прибавить 1, либо 2, либо 3. Если при обоихъ умноженіяхъ на 3 получались четныя числа, то къ произведенію ничего не нужно прибавлять; нужно прибавить 1, если нечетное число получилось въ результатѣ одного лишь перваго умноженія на 3; слѣдуетъ прибавить 2, если это имѣло мѣсто лишь при второмъ умноженіи на 3, и, наконецъ, должно прибавить 3, если въ результатѣ обоихъ умноженій на 3 получались нечетныя числа. Для доказательства мы будемъ различать четыре случая въ зависимости отъ того, даетъ ли задуманное число при дѣленіи на 4 въ остаткѣ 0, 1, 2 или 3; т. е., въ зависимости отъ того, нужно ли полагать искомое число равнымъ $4n$, или $4n+1$, или $4n+2$ или же $4n+3$, гдѣ n по прежнему означаетъ нѣкоторое цѣлое число. a) Совершая предписанныя дѣйствія, мы изъ числа $4n$ получимъ послѣдовательно числа $12n$, $6n$, $18n$, $9n$ и n, откуда заключаемъ, что $4n+0=4n$ и представляетъ собою задуманное число; b) изъ числа $4n+1$ получимъ по порядку: $12n+3$, $12n+4$, $6n+2$, $18n+6$, $9n+3$ и n, откуда заключаемъ, что задуманное число равно $4n+1$; c) изъ числа $4n+2$ получимъ: $12n+6$, $6n+3$, $18n+9$, $18n+10$, $9n+5$ и n; слѣдовательно, задуманное число равно $4n+2$;

d) изъ числа $4n + 3$ получимъ числа: $12n + 9$, $12n + 10$, $6n + 5$, $18n + 15$, $18n + 16$, $9n + 8$ и n, откуда находимъ задуманное число $4n + 3$.

— Третій примѣръ изъ книги Баше проще, чѣмъ два, только-что разсмотрѣнныхъ, потому что въ немъ не приходится дѣлать различія между четнымъ и нечетнымъ числомъ.

7. Предлагаемъ удвоить задуманное число, прибавить къ произведенію 5, сумму умножить на 5, къ произведенію прибавить 10 и полученное число умножить на 10. Мы предлагаемъ затѣмъ назвать намъ полученное произведеніе. Отнимаемъ отъ названнаго числа 350; число сотенъ въ остаткѣ равно задуманному числу. Дѣйствительно, $[(2x + 5) . 5 + 10] . 10$ даетъ намъ: $[10x + 25 + 10].10$, или $[10x + 35] . 10$, или $100x + 350$. Таково число, которое намъ называютъ. Отнявъ отъ него 350, мы получимъ $100x$, т. е. число, содержащее столько сотенъ, сколько въ задуманномъ числѣ единицъ.

— Лицу, совершенно не знающему алгебры, такое угадываніе задуманныхъ чиселъ должно показаться еще болѣе загадочнымъ, если само задуманное число вводится въ вычисленіе не только въ началѣ, но еще одинъ или нѣсколько разъ впослѣд-

ствіи. Поясним это слѣдующими примѣрами.

8. Задуманное число увеличивается на 3, сумма умножается на 6, произведеніе уменьшается на 3, изъ полученной разности вычитываютъ еще первоначально задуманное число; полученную разность дѣлятъ на 5, при чемъ дѣленіе въ подобныхъ случаяхъ всегда должно выполняться нацѣло. Мы предлагаемъ сообщить намъ полученный результатъ. Уменьшивъ его на 3, мы получимъ задуманное число. Дѣйствительно, ариѳметическое преобразованіе выраженія $[(x+3).6-3-x]:5$ даетъ число $x+3$. Напр., если задумано было число 19, то предписанныя дѣйствія приводятъ послѣдовательно къ числамъ 22, 132, 129, 110, 22. Узнавъ, что окончательный результатъ равенъ 22, мы уменьшаемъ его на 3 и получаемъ задуманное число.

9. Учетверенное задуманное число предлагаемъ уменьшить на 3, полученную разность умножить на 6, къ полученному произведенію прибавить сперва 3, а затѣмъ еще и задуманное число, полученную сумму предлагаемъ раздѣлить на 5 и къ полученному частному прибавить утроенную сумму задуманнаго числа и единицы. Мы просимъ затѣмъ сообщить намъ результатъ. Восьмая часть его всегда представитъ задуманное число. Въ самомъ дѣлѣ, путемъ упрощенія мы получимъ изъ выраженія $[(4x-3).6+3+x]:5+3(x+1)$ послѣдо-

вательно выраженія $25x - 15) : 5 + 3x + 3$, $5x - 3 + + 3x + 3$ и, наконецъ, $8x$. Напримѣръ, если задумано было число 11, то указанныя дѣйствія даютъ послѣдовательно 44, 41, 246, 249, 260, 52, затѣмъ $52 + + 3(11 + 1) = 52 + 3 . 12 = 52 + 36 = 88$. Дѣля полученный результатъ на 8, мы получимъ задуманное число 11.

10. Задуманное число, во-первыхъ, увеличиваютъ на 2 и сумму умножаютъ на 3; во-вторыхъ, задуманное число увеличиваютъ на 4 и сумму умножаютъ на 5; въ-третьихъ, задуманное число увеличивается на 6 и сумму умножаютъ на 7. Мы предлагаемъ затѣмъ вычесть 8 изъ суммы трехъ полученныхъ результатовъ, раздѣлить разность на 15 и сообщить намъ полученное частное. Уменьшивъ его на 4, мы получимъ задуманное число. Дѣйствительно, раскрывъ скобки въ выраженіи $3(x + 2) + + 5(x + 4) + 7(x + 6)$ и соединивъ подобные члены, мы получимъ $15x + 68$. Далѣе, изъ выраженія $[15x + 68 - 8] : 15$ мы получимъ выраженіе $x + 4$, которое на 4 превышаетъ искомое число x.

— Если отгадывающій знаетъ ариѳметику и алгебру, то онъ можетъ также **предоставить** лицу, задумавшему число, подвергнуть послѣднее какимъ угодно дѣйствіямъ, при чемъ это лицо можетъ пользоваться какими ему заблагоразсудится числами. Задумавшій число дол-

женъ лишь указывать, какое число онъ прибавляетъ или вычитываетъ, на какое число множитъ или дѣлитъ. Тогда отгадывающій обозначаетъ задуманное число черезъ x и составляетъ уравненіе, пользуясь тѣми данными, которыя ему сообщили. Рѣшая уравненіе, онъ получаетъ искомое число x, которое онъ желалъ отгадать. При этомъ задуманное число можетъ быть и отрицательнымъ и дробнымъ. Числа, которыми пользовались при вычисленіяхъ, также могутъ быть дробными или отрицательными. Однако же, если задуманное число вводится при этомъ въ вычисленіе не одинъ, а нѣсколько разъ, то можетъ случиться, что уравненіе, которое служитъ для нахожденія задуманнаго числа окажется степени выше первой, и поэтому рѣшеніе уравненія будетъ сопряжено съ затрудненіями. Конечно, въ простыхъ случаяхъ и при небольшихъ числахъ нетрудно будетъ найти число x, удовлетворяющее полученному уравненію. Здѣсь мы приведемъ еще лишь два примѣра для того случая, когда при полученіи задуманнаго числа приходится рѣшить уравненіе второй степени.

11. Предлагаемъ умножить задуманное число на другое, превышающее его на 1, отнять отъ произведенія задуманное число и назвать намъ полученный остатокъ. Квадратный корень изъ него представитъ намъ задуманное число. Дѣйствительно, выраженіе $x(x+1)-x$ равно x^2+x-x, или x^2. Если задуманное число равно 29, то полученный остатокъ равенъ 841; извлекая квадратный корень изъ 841, находимъ, что задумано было число 29.

12. Тотъ, которому предоставлено производить какія ему будетъ угодно дѣйствія надъ задуманнымъ имъ числомъ, указываетъ, что, удвоивъ задуманное число, онъ сложилъ его съ 17, полученную сумму умножилъ на задуманное число и такимъ образомъ получилъ число 135. Отгадывающій составляетъ уравненіе $(2x+17)x=135$, откуда слѣдуетъ, что $2x^2+17x=135$, или $4x^2+34x=270$. Для начала, чтобы избѣжать дробей, отгадывающій умножаетъ уравненіе на 4, что приводитъ къ уравненію $16x^2+136x=1080$. Прибавляя къ обѣимъ частямъ уравненія квадратъ восьмой части числа 136, т. е. число 17, получаемъ: $(4x)^2+2\cdot 4x\cdot 17+17^2=1369$. Квадратный корень изъ 1369 равенъ 37, такъ что лѣвая часть уравненія представляетъ собою квадратъ числа $4x+17$, а правая — квадратъ числа 37; отсюда слѣдуетъ, что $4x+17=37$, или $4x+17=-37$; въ первомъ случаѣ задуманное число равно 5, во второмъ случаѣ оно равно $-13\frac{1}{2}$; такимъ

образомъ, если задумавшій число имѣлъ право выбрать отрицательное или дробное число, то отгадывающій долженъ остановиться на одномъ изъ двухъ чиселъ: 5 и $-13^1/_2$.

— До сихъ поръ мы предполагали, что задумано было всего лишь одно число. Если же задумано два или нѣсколько чиселъ, то разысканіе ихъ приводитъ къ системѣ двухъ или нѣсколькихъ уравненій съ такимъ же числомъ неизвѣстныхъ. Если же чиселъ задумано больше, чѣмъ сдѣлано относительно нихъ указаній, то рѣшеніе приводится къ такъ называемымъ Діофантовымъ уравненіямъ. Но мы не будемъ здѣсь разсматривать относящихся сюда задачъ и коснемся лишь случая, когда задумано два числа, относительно которыхъ даются два указанія, или когда задуманы 3 числа и имѣются три указанія. Далѣе слѣдуютъ нѣсколько весьма простыхъ примѣровъ.

13. Отгадывающій предлагаетъ указать ему сумму и разность двухъ задуманныхъ чиселъ. Найдя полусумму и полуразность обоихъ названныхъ результатовъ, онъ получаетъ задуманныя числа. Дѣйствительно, складывая почленно уравненія $x+y=a$ и $x-y=b$, находимъ: $2x=a+b$, т. е. x равенъ

половинѣ суммы $a+b$. Вычитая, получимъ: $2y = a-b$, т. е. y есть половина разности $a-b$.

14. Предположимъ, что задумавшій два числа получилъ въ результатѣ числа 43 и 47 соотвѣтственно съ тѣмъ, сложилъ ли онъ учетверенное первое число съ упятереннымъ вторымъ или же, наоборотъ, упятеренное первое съ учетвереннымъ вторымъ. Тогда мы должны положить $4x+5y=43$ и $5x+4y=47$. Складывая оба уравненія, находимъ уравненіе $9x+9y=90$, или $x+y=10$, откуда слѣдуетъ, что $4x+4y=40$, а также $5x+5y=50$. Вычитая уравненіе $4x+4y=40$ изъ уравненія $4x+5y=43$, найдемъ, что $y=3$. Далѣе, вычитая уравненіе $4x+5y=43$ изъ уравненія $5x+5y=50$, получимъ, что $x=7$. Такимъ образомъ, задуманныя числа суть 7 и 3.

15. Задуманы три числа; предлагаемъ сложить первое со вторымъ, первое съ третьимъ и второе съ третьимъ. Задумавшій указываетъ намъ, что полученныя суммы равны соотвѣтственно 13, 21, 18. Тогда мы составляемъ уравненія: $x+y=13$, $x+z=21$, $y+z=18$; складывая всѣ три уравненія, получаемъ $2x+2y+2z=52$, или $x+y+z=26$. Вычитая изъ этого уравненія каждое изъ трехъ составленныхъ, мы найдемъ для задуманныхъ трехъ чиселъ значенія: $x=8$, $y=5$, $z=13$. Вообще, если задуманы три числа и извѣстны суммы каждой пары, то для нахожденія задуманныхъ чиселъ достаточно вычесть

изъ полусуммы трехъ указанныхъ результатовъ каждый изъ этихъ послѣднихъ.

— Подобныя задачи на отгадываніе чиселъ становятся болѣе увлекательными для непосвященнаго человѣка, если отгадываемыя числа относятся къ такимъ вещамъ, которыя близко его касаются, напримѣръ, если задумано число монетъ, которыя онъ имѣетъ при себѣ, или число его зубовъ, или дата дня его рожденія, или же годъ его рожденія, или возрастъ, или число очковъ, которые выпали у него при игрѣ въ кости и т. д. Здѣсь мы дадимъ одинъ лишь примѣръ подобныхъ конкретныхъ задачъ на отгадываніе чиселъ.

16. Мы предлагаемъ лицу, возрастъ котораго мы желаемъ угадать, указать намъ сумму цифръ числа, выражающаго его возрастъ въ годахъ. Затѣмъ мы просимъ его переставить цифры этого числа, т. е. цифру десятковъ поставить на мѣсто единицъ, а цифру единицъ на мѣсто десятковъ, и затѣмъ назвать намъ разность между первоначальнымъ числомъ и обращеннымъ Чтобы при помощи двухъ указанныхъ намъ чиселъ опредѣлить возрастъ, мы дѣлимъ второе число на 9: въ подобныхъ случаяхъ это дѣленіе всегда выполняется безъ остатка. Полученное частное мы складываемъ съ суммой цифръ и вычитываемъ изъ

нея. Половины полученныхъ двухъ результатовъ представятъ намъ цифры числа, выражающаго возрастъ. Если, напр., намъ указали, что сумма цифръ равна 11, а разность между прямымъ числомъ и обращеннымъ составляетъ 63, то нужно 63 раздѣлить на 9, полученное частное 7 сложить съ 11 и вычесть изъ 11; такимъ образомъ получимъ 18 и 4; половины этихъ чиселъ равны соотвѣтственно 9 и 2. Чтобы рѣшить, составляетъ ли возрастъ 29 лѣтъ или 92 года, можно, если другого способа нѣтъ, справиться, которое изъ чиселъ больше: первоначальное ли или то, которое получилось отъ перестановки цифръ.

---

http://mathesis.ru

§ 2.

Предугадываніе полученныхъ результатовъ.

— Если мы будемъ предписывать лицу, задумавшему какое-нибудь число, какія производить надъ нимъ дѣйствія, то можно распорядиться такъ, чтобы при вычисленіи задуманное число выпадало; само собою разумѣется, что задуманное число вводится здѣсь не только въ началѣ вычисленія, но, по меньшей мѣрѣ, еще одинъ разъ въ дальнѣйшемъ ходѣ вычисленія. Вычисленіе полученнаго выраженія, которое въ виду выпаденія задуманнаго числа содержитъ одни лишь извѣстныя числа, приведетъ къ результату, къ которому неминуемо придетъ и лицо, задумавшее число, такъ что мы можемъ сказать этому лицу полученный имъ результатъ. Поясникъ сказанное примѣромъ:

1. Мы предлагаемъ утроить задуманное число, къ произведенію прибавить 2, сумму умножить на 4, къ произведенію прибавить 4, сумму раздѣлить

на 12 и изъ полученнаго частнаго вычесть задуманное число. Въ этомъ случаѣ мы можемъ сказать, что лицо, задумавшее число, въ результатѣ должно было получить 1, каково бы ни было задуманное число. Дѣйствительно, $(3x+2)\cdot 4+4=12x++8+4=12x+12$; раздѣливъ это выраженіе на 12, получимъ $x+1$; вычитая x изъ $x+1$, мы непремѣнно получимъ 1, каково бы ни было число x. Если, напр., задумано было число 7, то послѣдовательно получались такія числа: 21, 23, 92, 96, 8, 1. Если же задуманное число равно 9, то послѣдовательно получаются числа 27, 29, 116, 120, 10, 1.

2. Если увеличить задуманное число на 5, сумму умножить на 18, изъ произведенія вычесть утроенное задуманное число, разность раздѣлить на 15 и отъ частнаго отнять задуманное число, то всегда получится 6, какое бы ни задумать число. Дѣйствительно, $[(x+5)\cdot 18-3x]:15-x=[18x+90-3x]:15-x=$ $=[15x+90]:15-x=x+6-x=6$. Напримѣръ, если задумать число 13, то послѣдовательно получатся числа: 18, 324, 285, 19, 6. Если задумано было число 45, то послѣдовательно получались числа 50, 900, 765, 51, 6.

3. Перемножьте два числа, изъ которыхъ одно превышаетъ задуманное вами число на 3, а другое на 4, учетверите произведеніе и къ результату прибавьте 1. Извлеките изъ полученной суммы квадратный корень и вычтите изъ полученнаго чи-

сла удвоенное задуманное число Въ результатѣ непремѣнно получится 7. Дѣйствительно, выраженіе $4(x+3)(x+4)+1 = 4x^2+28x+49 = (2x+7)^2$. Извлеченіе квадратнаго корня дастъ число $2x+7$. Вычитая $2x$ изъ $2x+7$, всегда получимъ 7, каково бы ни было число x. Если, напр, задумано было число 96, то придется выполнить слѣдующее вычисленіе: 99 разъ 100 равно 9900, умноженіе этого числа на 4 даетъ 39600. Извлеченіе квадратнаго корня изъ $39600+1$, т. е. изъ числа 39601, даетъ число 199. Вычитая изъ этого числа удвоенное задуманное число, т. е. 192, получимъ, дѣйствительно, число 7.

http://mathesis.ru

§ 3.

Замѣчательные ряды цифръ.

Міръ чиселъ таитъ въ себѣ разнообразныя свойства, которыя непосвященному несомнѣнно должны казаться чудесными, тогда какъ искушенный въ ариѳметикѣ считаетъ, что они сами собой разумѣются, потому что онъ можетъ доказать ихъ. Здѣсь мы разсмотримъ нѣкоторыя свойства, опредѣляемыя послѣдовательностью, въ которой цифры слѣдуютъ другъ за другомъ.

Шестизначное число

142857

имѣетъ то замѣчательное свойство, что послѣдовательный порядокъ цифръ этого числа не мѣняется при умноженіи его на 2, 3, 4, 5 или 6, если только мы примемъ, что за послѣдней цифрой слѣдуетъ первая. Дѣйствительно,

$$142857 \cdot 2 = 285714;$$
$$142857 \cdot 3 = 428571^{1});$$
$$142857 \cdot 4 = 571428;$$
$$142857 \cdot 5 = 714285^{1});$$
$$142857 \cdot 6 = 857142.$$

Умножая далѣе наше число на 7, мы получимъ число, состоящее изъ однѣхъ лишь девятокъ.

http://mathesis.ru

Если же множитель превышаетъ 7, то получится число, содержащее болѣе шести цифръ. Если мы затѣмъ сложимъ число, стоящее впереди послѣднихъ шести цифръ, съ числомъ, состоящимъ изъ этихъ послѣднихъ, то мы снова встрѣтимся съ тѣмъ же послѣдовательнымъ рядомъ цифръ, т. е. получимъ одно изъ шести слѣдующихъ чиселъ: 142857, 428571, 285714, 857142, 571428, 714285. Если мы, напримѣръ, умножимъ первоначальное число 142857 на 24, то получимъ 3428568. Число, стоящее впереди послѣднихъ шести цифръ, есть 3. Складывая его съ числомъ 428568, составленнымъ изъ послѣднихъ шести цифръ, мы получимъ число 428571, т. е. число, въ которомъ послѣдовательный порядокъ цифръ такой же, какъ и въ первоначальномъ числѣ 142857, конечно, если считать, что за послѣдней цифрой слѣдуетъ первая. Если же мы умножимъ наше число на число, кратное 7, и будемъ поступать далѣе по прежнему, мы получимъ число, составленное изъ шести девятокъ. Напр, умножая наше число на 42, мы получимъ сперва 5999994; такъ какъ это число содержитъ семь цифръ, то число 5, изображаемое седьмой цифрой слѣва, нужно сложить съ 999994, и мы, дѣйствительно, получимъ 999999.

Это чудесное свойство числа 142857 станетъ вполнѣ понятнымъ, если мы вспомнимъ, что 142857 есть періодъ той десятичной періодической дроби, въ которую превращается дробь $\frac{1}{7}$. Когда мы обращаемъ

дробь $\frac{1}{7}$ въ десятичную, то мы получаемъ послѣдовательно остатки 3, 2, 6, 4, 5, 1; умножая каждый остатокъ на 10 и дѣля произведеніе на 7, мы получаемъ послѣдующее частное. Поэтому частныя равны послѣдовательно 4, 2, 8, 5, 7, 1. Такимъ образомъ, дробь $\frac{3}{7}$ имѣетъ періодъ 428571, дробь $\frac{2}{7}$ — періодъ 285714, дробь $\frac{6}{7}$ — періодъ 857142 и т. д. Но, съ другой стороны, дробь $\frac{3}{7}$ равна утроенной дроби $\frac{1}{7}$, дробь $\frac{2}{7}$ — удвоенной дроби $\frac{1}{7}$, а дробь $\frac{6}{7}$ равна ушестеренной дроби $\frac{1}{7}$ и т. д. Этимъ естественно объясняется происхожденіе указанной особенности числа 142857 для того случая, когда множитель не превышаетъ 6. Умножая $\frac{1}{7}$ на 7, получимъ 1; но съ другой стороны единица равна періодической десятичной дроби, состоящей изъ однѣхъ лишь девятокъ.—Какъ надо поступить въ томъ случаѣ, когда множитель превышаетъ 7, покажетъ намъ слѣдующій примѣръ, гдѣ множителемъ служитъ число 24. То обстоятельство, что дробь $\frac{1}{7}$ равна періодической десятичной дроби съ періодомъ 142857, ариѳметически можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{1}{7} = \frac{142857}{10^6} + \frac{142857}{10^{12}} + \frac{142857}{10^{18}} + \cdots$$

Умножая обѣ части равенства на 24, получимъ:

$$3\tfrac{3}{7} = \frac{3428568}{10^6} + \frac{3428568}{10^{12}} + \frac{3428568}{10^{18}} + \cdots,$$

http://mathesis.ru

или

$$3\tfrac{3}{7} = 3 + \frac{428568}{10^6} + \frac{3}{10^6} + \frac{428568}{10^{12}} + \frac{3}{10^{12}} + \cdots$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что сложивъ число, состоящее изъ послѣднихъ шести цифръ, съ числомъ, изображеннымъ цифрами, стоящими передъ ними, мы получимъ число съ тою же послѣдовательностью цифръ.

Изъ предшествующихъ соображеній вытекаетъ, что замѣчательная особенность числа 142857 присуща всякому (p—1) - значному числу, если оно представляетъ собою періодъ десятичной періодической дроби, въ которую обращается дробь $\frac{1}{p}$, гдѣ знаменатель p есть простое число. Чтобы найти дальнѣйшія числа такого же рода, мы должны опредѣлить простыя числа p, обладающія тѣмъ свойствомъ, что десятичная дробь, равная $\frac{1}{p}$, имѣетъ въ періодѣ $p-1$ цифръ. Наименьшее изъ такихъ чиселъ равно 7, далѣе слѣдуютъ 17 и 19. Обращая дробь $\frac{1}{17}$ въ десятичную, получимъ въ періодѣ 16 цифръ, а именно

0588235294117647.

Разсматривая этотъ періодъ, какъ самостоятельное число, мы найдемъ, что оно имѣетъ такое же свойство, какъ и число 142857, если только мы будемъ считать одной изъ цифръ числа тотъ нуль, которымъ начинается періодъ, т. е. если будемъ разсматривать число не какъ 15-значное, но какъ

16-значное. Можно тогда умножать это число на произвольно выбраннаго множителя, не превосходящаго 17, и постоянно получать числа съ тою же послѣдовательностью цифръ. Напримѣръ, умноженіе числа на 4 даетъ:

2352941176470588.

Отъ умноженія на 17 мы опять получимъ однѣ лишь девятки. Если же множитель превышаетъ 17, то, сложивъ число, составленное изъ послѣднихъ 16 цифръ произведенія, съ числомъ, изображеннымъ стоящими передъ ними цифрами, мы опять получимъ число съ тѣмъ же рядомъ цифръ. Напримѣръ, если мы умножимъ наше число на 44, то получимъ сперва

25882352941176468.

Если сложимъ число 2, стоящее передъ 16 послѣдними цифрами, съ числомъ 5882352941176468, то получимъ

5882352941176470,

т. е. число съ такою же послѣдовательностью цифръ, какъ и первоначальное.

Далѣе, если мы обратимъ дробь $\frac{1}{19}$ въ десятичную, то получимъ 18-значный періодъ, представленный слѣдующимъ 18-значнымъ числомъ:

052631578947368421.

Если будемъ считать стоящій впереди нуль одной изъ цифръ числа, то и оно имѣетъ то свойство, что, умножая его на произвольное число, не превышающее 18, мы вновь будемъ получать тотъ

http://mathesis.ru

же рядъ цифръ [2]). Напримѣръ, умножая на 13, мы получимъ

684210526315789473.

Конечно, существуетъ безчисленное множество чиселъ, подобныхъ тѣмъ тремъ разсмотрѣннымъ, которыя получены изъ дробей $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{19}$: всѣ дроби вида $\frac{1}{p}$, которыя обращаются въ десятичную періодическую дробь съ $(p-1)$-значнымъ періодомъ, даютъ подобныя же числа. Замѣтимъ, что этимъ ствойствомъ обладаютъ не всѣ дроби вида $\frac{1}{p}$, въ которыхъ p есть простое число, но тѣ лишь дроби, для знаменателей которыхъ число 10, основаніе нашей системы нумераціи, является, какъ говорятъ въ Теоріи чиселъ, первообразнымъ корнемъ [3]).

Если выбрать простое число p такъ, чтобы періодъ десятичной дроби, въ которую обращается дробь $\frac{1}{p}$, содержалъ менѣе, чѣмъ $p-1$ цифръ, то такой періодъ будетъ числомъ, которое, будучи умножено на нѣкоторыя опредѣленныя числа, даетъ произведенія, состоящія изъ того же ряда цифръ. Сравнительно съ прежде разсмотрѣнными случаями разница состоитъ, слѣдовательно, въ томъ, что въ качествѣ множителей нельзя брать любыя числа, но лишь нѣкоторыя опредѣленныя. Напримѣръ, обращая дробь $\frac{1}{13}$ въ періодическую, мы получимъ въ періодѣ 076923. Поэтому число

076923

отличается тѣмъ свойствомъ, что, будучи умножено на нѣкоторыя числа, оно даетъ произведенія, составленныя изъ одинаковыхъ рядовъ цифръ. Множители эти суть 1, 10, 9, 12, 3, 4, а также всякое другое число, превышающее какое-нибудь изъ этихъ на число, кратное 13. Если же умножать число 076923 на 2, 5, 6, 7, 8 и 11, то получимъ

153846, 384615, 461538, 538461, 615384, 846153,

т. е. числа, составленныя изъ одного и того же ряда цифръ 1, 5, 3, 8, 4, 6, 1, 5, 3, . . . Если же взятый множитель превышаетъ какое-нибудь изъ чиселъ 2, 5, 6, 7, 8 и 11 на число, кратное 13, то произведеніе содержитъ болѣе шести цифръ; поступая съ произведеніемъ вышеуказаннымъ образомъ, мы можемъ снова получать шестизначныя числа съ тѣмъ же рядомъ цифръ. Мы видимъ, такимъ образомъ, что десятичная дробь, въ которую обращается дробь $\frac{a}{13}$, даетъ намъ два шестизначныхъ числа, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что произведеніе любого изъ нихъ на произвольное число изображается тѣмъ же рядомъ цифръ, какой мы находимъ въ одномъ изъ этихъ двухъ шестизначныхъ чиселъ. Итакъ, подобно тому, какъ числа 7, 17 и 19 сопряжены каждое съ однимъ рядомъ цифръ, число 13 сопряжено съ двумя рядами.

Возьмемъ, далѣе, простое число 41; обративъ дробь $\frac{1}{41}$ въ десятичную, мы получимъ въ періодѣ

http://mathesis.ru

всего пять цифръ. Поэтому число, представленное этимъ періодомъ, а именно число

02439

имѣетъ ту особенность, что умноженіе его на какое-угодно число даетъ 8 группъ цифръ, по пяти въ каждой, при чемъ въ пяти числахъ, составляющихъ каждую группу, цифры расположены въ одинаковой послѣдовательности, а именно:

02439 . 1=02439	02439 . 2=04878	02439 . 3=07317
02439 . 10=24390	02439 . 20=48780	02439 . 30=73170
02439 . 18=43902	02439 . 36=87804	02439 . 13=31707
02439 . 16=39024	02439 . 32=78048	02439 . 7=17073
02439 . 37=90243	02439 . 33=80487	02439 . 29=70731

и т. д.

Можно было бы, конечно, взять какое угодно изъ этихъ чиселъ, напр, 70731. Умножая его на произвольное число, мы непремѣнно будемъ получать одинъ изъ восьми возможныхъ рядовъ цифръ, если только будемъ соблюдать извѣстное правило: въ случаѣ, когда произведеніе содержитъ болѣе пяти цифръ, число, составленное изъ послѣднихъ пяти цифръ, нужно сложить съ числомъ, стоящимъ передъ этими цифрами. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующему общему положенію: Если r есть простое число, то періодическія десятичныя дроби, въ которыя обращаются всѣ дроби

со знаменателемъ p, приводятъ къ g [4]) группамъ по $\frac{p-1}{g}$ чиселъ въ каждой; всѣ эти числа обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ: каждое изъ нихъ, будучи умножено на любое число, даетъ въ произведеніи одно изъ тѣхъ же p—1 чиселъ, если только въ произведеніяхъ, содержащихъ болѣе, чѣмъ p—1 цифръ, будемъ складывать число, составленное изъ послѣднихъ p—1 цифръ съ числомъ, стоящимъ передъ ними. При этомъ въ числахъ одной и той же группы послѣдовательный порядокъ цифръ одинъ и тотъ же, какъ, напримѣръ, въ числахъ 48780 и 80487.

Замѣчательные ряды цифръ получаются также при обращеніи дроби $\frac{1}{81}$ въ десятичную. Послѣдняя имѣетъ періодомъ число

012345679.

Умножая это число на 9, получимъ въ произведеніи число, изображаемое исключительно цифрой 1, такъ какъ $\frac{9}{81}=\frac{1}{9}$, а періодъ десятичной дроби, въ которую обращается $\frac{1}{9}$, равенъ 1. Отсюда слѣдуетъ, что умноженіе на какое угодно число, кратное 9, дастъ число, состоящее исключительно изъ ряда одинаковыхъ цыфръ. Въ числѣ 012345679 представлены всѣ цифры отъ 0 до 9 за исключеніемъ 8, при чемъ онѣ расположены въ натураль-

номъ порядкѣ. Если умножимъ число 012345679 на какое-нибудь число, не дѣлящееся на 3, то получимъ число, которое тоже содержитъ всѣ цифры отъ 0 до 9 за исключеніемъ одной; при этомъ постоянно оказывается, что недостающая цифра представляетъ собою то именно число, которое нужно прибавить къ множителю, чтобы получить число, кратное 9. Напримѣръ, при умноженіи на 2 получимъ 024691358, т. е. число, содержащее всѣ цифры, кромѣ $7 = 9 - 2$. Умножая на 8, получимъ число 098765432, т. е. опять число, составленное изъ всѣхъ цифръ, кромѣ $1 = 9 - 8$. Умножая на 13, получимъ число, въ которомъ встрѣчаются всѣ цифры, кромѣ 5, потому что 5 есть то число, которое нужно прибавить къ 13, чтобы получить ближайшее число, кратное 9, а именно 18. Это свойство остается въ силѣ и въ томъ случаѣ, если выбранный множитель превышаетъ 81; но въ этомъ случаѣ слѣдуетъ поступать такимъ же образомъ, какъ въ выше разобранныхъ рядахъ цифръ, т. е. число, стоящее передъ послѣдними девятью цифрами, нужно будетъ сложить съ числомъ, составленнымъ изъ этихъ послѣднихъ. Наконецъ, если умножимъ число 012345679 на множитель, который дѣлится на 3, но не дѣлится на 9, то девять цифръ представятъ намъ трижды повторенное трехзначное число. Напр., умноженіе на 12 даетъ въ произведеніи число 148148148. Доказательство этихъ замѣчательныхъ свойствъ чис-

ла 012345679 завело бы насъ слишкомъ далеко. Скажемъ только, что эти свойства находятся въ связи съ тѣмъ обстоятельствомъ, что разсмотрѣнное число является періодомъ десятичной дроби, въ которую обращается дробь $\frac{1}{(10-1)^2}$.

Совершенно другой характеръ имѣютъ замѣчательныя особенности всѣхъ 2n-значныхъ чиселъ, въ которыхъ первыя n цифръ суть единицы, слѣдующія n—1 цифръ—пятерки, а послѣдняя цифра есть 6: всякое такое число есть квадратъ, сколь велико бы ни было число n. Такъ,

16 есть квадратъ числа 4,
1156 есть квадратъ числа 34,
111556 есть квадратъ числа 334,
11115556 есть квадратъ числа 3334,
1111155556 есть квадратъ числа 33334

и т. д.

То же свойство имѣетъ и всякое 2n-значное число, первыя n цифръ котораго суть четверки, слѣдующія n — 1 цифръ—восьмерки, а послѣдняя цифра — 9. Такъ, напр.,

49 есть квадратъ числа 7,
4489 есть квадратъ числа 67,
444889 есть квадратъ числа 667,
44448889 есть квадратъ числа 6667,
4444488889 есть квадратъ числа 66667

и т. д.

http://rusthesis.ru

Чтобы узнать, на чемъ основаны эти свойства и вмѣстѣ съ тѣмъ изслѣдовать, нѣтъ ли другихъ 2n-значныхъ чиселъ, обладающихъ тѣми же свойствами, мы сперва разсмотримъ квадратъ числа

$$b = 3(10^a + 10^{a-1} + \cdots + 10 + 1).$$

Мы находимъ:

$$b^2 = 9(10^a + 10^{a-1} + \cdots + 10 + 1)^2,$$

или

$$b^2 = (10 - 1)(10^a + 10^{a-1} + \cdots + 10 + 1) \times \\ \times (10^a + 10^{a-1} + \cdots + 10 + 1),$$

или, пользуясь извѣстнымъ преобразованіемъ,

$$b^2 = (10^{a+1} - 1)(10^a + 10^{a-1} + \cdots + 10 + 1),$$

или

$$b^2 = (10^{2a+1} + 10^{2a} + \cdots + 10^{a+1}) - \\ - (10^a + 10^{a-1} + \cdots + 1).$$

Этимъ равенствомъ мы сейчасъ воспользуемся, при чемъ мы будемъ исходить изъ тождества

$$(nb + 1)^2 = n^2b^2 + 2nb + 1,$$

правую часть котораго мы можемъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$n^2(10^{2a+1} + 10^{2a} + \cdots + 10^{a+1}) + \\ + (6n - n^2)(10^a + 10^{a-1} + \cdots + 10) + \\ + (6n - n^2 + 1).$$

http://mathesis.ru

Если въ полученномъ выраженіи положить $n = 1$, то мы найдемъ:

$$(b + 1)^2 = 1.(10^{2a+1} + 10^{2a} + \cdots + 10^{a+1}) + \\ + 5(10^a + 10^{a-1} + \cdots + 10) + 6;$$

полагая здѣсь послѣдовательно $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$ и т. д., мы получимъ въ правой части числа 16, 1156, 111556, 11115556 и т. д., лѣвая же часть дастъ намъ $(3 + 1)^2$, $(33 + 1)^2$, $(333 + 1)^2$, $(3333 + 1)^2$ и т. д.

Если же мы положимъ $n = 2$, то получимъ:

$$[6(10^a + 10^{a-1} + \cdots) + 1]^2 = 4(10^{2a+1} + 10^{2a} + \cdots \\ \cdots + 10^{a+1}) + 8(10^a + 10^{a-1} + \cdots + 10) + 9,$$

откуда, полагая $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$ и т. д. послѣдовательно получаемъ:

$$7^2 = 49,\ 67^2 = 4489,\ 667^2 = 4448889 \text{ и т. д.}$$

Если же положимъ n равнымъ 3 или больше трехъ, то формулы, конечно, будутъ сохранять свою силу, но онѣ уже не будутъ служить источникомъ для полученія замѣчательныхъ чиселъ, потому что n^2, $6n - n^2$ и $6n - n^2 + 1$, представляя собою цифры, не должны превышать числа 9.

http://mathesis.ru

§ 4.

Весьма большія числа.

Въ глубинѣ Австраліи, а также въ глубинѣ Южной Америки живутъ племена, которыя не могутъ выразить на своемъ языкѣ чиселъ, превышающихъ 2 или 6, ни съ помощью особыхъ числительныхъ, ни посредствомъ сочетанія словъ, выражающихъ меньшія числа, ни путемъ описанія. Эти племена вообще не имѣютъ потребности считать большія числа существенно отличными другъ отъ друга. Такъ, напримѣръ, г. фонъ-Штейненъ (von den Steinen) разсказываетъ о племени Баккаири (Bacсaïri), живущемъ у притока Амазонки Ксингу, что числа отъ 1 до 6 эти дикари могутъ выразить путемъ сочетанія словъ; когда же ихъ побуждаютъ назвать бо́льшія числа, они хватаются за волосы, чтобы выразить этимъ нѣчто неисчислимое. О Ботокудахъ, которые тоже живутъ въ Южной Америкѣ между Pio Доче и Pio Пардо, разсказываютъ, что ихъ языкъ различаетъ лишь „одинъ“ и „много“, такъ что уже „два“ и „три“ они выражаютъ однимъ и тѣмъ же словомъ. При всемъ нашемъ презрительномъ недоумѣніи по поводу столь мало развитой потребности выражать числа, мы не должны забывать, если мы критически отно-

http://rutracker.org

симся къ себѣ, что и въ нашей современной культурѣ средній человѣкъ не въ состояніи различать большія числа или, по меньшей мѣрѣ, не въ состояніи дѣлать правильныхъ умозаключеній въ области большихъ чиселъ. Подобно тому, какъ ботокудамъ кажется несущественной разница между двумя и тремя, такъ и многимъ современнымъ культурнымъ людямъ представляется несущественной разница между биллiономъ и трилліономъ, или, по крайней мѣрѣ, они не думаютъ о томъ, что одно изъ этихъ чиселъ въ милліонъ разъ больше другого, такъ что первое относится ко второму приблизительно такъ, какъ разстояніе отъ Берлина до Санъ-Франциско относится къ ширинѣ улицы. Что и наша потребность въ числахъ раньше была менѣе велика, чѣмъ теперь, мы узнаемъ изъ сравненія словъ, выражающихъ числа въ индогерманскихъ языкахъ. Во всѣхъ этихъ языкахъ слова, выражающія числа отъ 1 до 100, обнаруживаютъ близкое родство, но уже въ словахъ, выражающихъ тысячу, мы этого родства не находимъ. Дѣйствительно, между словами: Χίλιοι, mille, tausend, безъ сомнѣнія, нѣтъ никакого этимологическаго родства. Отсюда мы можемъ заключить, что потребность выразить словомъ столь большое число, какъ тысяча, у индогерманскихъ народовъ возникла лишь послѣ ихъ раздѣленія. Что касается слова „милліонъ“, то впервые оно было употреблено, повидимому, въ 1362 году; но во всеобщее упо-

требленіе оно вошло конечно гораздо позже. Во всякомъ случаѣ, великій нѣмецкій вычислитель Адамъ Ризе (Adam Riese), жившій въ серединѣ 16 столѣтія, еще не зналъ слова „милліонъ“; онъ описывалъ его посредствомъ „тысячи тысячъ“. Гораздо позже возникли слова „милліардъ“ и „биллiонъ“. Слово „милліардъ“ для обозначенія тысячи милліоновъ вошло въ употребленіе лишь въ XIX столѣтіи, а именно, впервые оно встрѣчается въ языкѣ финансистовъ. Тотъ фактъ, что биллiонъ содержитъ милліонъ милліоновъ, имѣетъ важное значеніе въ астрономіи. Дѣйствительно, разстоянія планетъ отъ солнца или другъ отъ друга варіируютъ между шестью милліонами и нѣсколькими стами милліоновъ миль, тогда какъ разстоянія ближайшихъ неподвижныхъ звѣздъ отъ солнца или отъ какой-нибудь точки нашей планетной системы содержатъ отъ пяти биллiоновъ до нѣсколькихъ сотъ биллiоновъ миль. Такъ какъ биллiонъ относится къ одному милліону, какъ милліонъ къ 1, то всѣ разстоянія между звѣздами планетной системы представляютъ собою исчезающе-малыя величины въ сравненіи съ разстояніемъ планетъ отъ какой-либо неподвижной звѣзды. Такимъ образомъ, зрителю, находящемуся на Сиріусѣ, не только солнце или земля, но и вся наша планетная система должна казаться исчезающе-малой свѣтящейся точкой, т. е. такой же точкой, какой кажется намъ Сиріусъ, который, весьма

возможно, тоже представляетъ собою цѣлую планетную систему. Далѣе, отношеніе милліона къ билліону станетъ намъ очень яснымъ, если мы вспомнимъ, что неполныхъ два мѣсяца содержатъ милліонъ секундъ, тогда какъ билліонъ секундъ составляетъ болѣе тридцати тысячъ лѣтъ; такимъ образомъ, въ историческую эпоху человѣческій родъ не прожилъ еще билліона секундъ.

Почему мы легко ошибаемся въ числахъ, превосходящихъ нѣсколько сотъ милліоновъ, объясняется тѣмъ, что торговля, промышленность и техника рѣдко приводятъ къ числамъ, содержащимъ болѣе восьми знаковъ, и только въ физико-математическихъ наукахъ приходится оперировать съ столь большими числами. Эти науки потребовали поэтому дальнѣйшей разработки словообразованія для большихъ чиселъ. Для милліона милліоновъ придумали слово трилліонъ. Такимъ образомъ, трилліонъ изображается посредствомъ единицы съ 18-ью нулями. Продолжая въ этомъ направленіи, мы приходимъ къ квадрилліону, который изображается единицей съ 24 нулями. Пользуясь такимъ образомъ латинскими числительными, мы можемъ идти сколь угодно далеко. Такъ, напримѣръ, мы могли бы называть 600-ую степень десяти, т. е. число, изображаемое единицей съ 600-ми нулей, словомъ „центезилліонъ“. Въ дѣйствительности уже числа, превышающія милліонъ, мы предпочитаемъ приближенно выражать посредствомъ степе-

http://rutracker.ru

ней числа 10. Напримѣръ, вѣсъ земли заключается между 5.10^{24} и 6.10^{24} килограммами.

Тотъ фактъ, что лишь благодаря результатамъ современныхъ точныхъ наукъ возникла необходимость образованія словъ для выраженія большихъ чиселъ, можетъ навести насъ на мысль, что ни одинъ народъ древности не занимался большими числами. Въ общемъ это вѣрно. Исключеніе составляетъ лишь одинъ народъ, именно индусы. Въ Индіи, гдѣ была изобрѣтена наша удобная система нумераціи, еще во времена Будды существовали особыя числительныя для всѣхъ чиселъ до ста тысячъ милліоновъ, и, по преданію, самъ Будда довелъ образованіе числительныхъ до 10^{54}, т. е. до числа, которое мы должны были бы назвать нониллліономъ по аналогіи со словами милліонъ, биллліонъ, трилліонъ. Уже въ національномъ эпосѣ и народныхъ сказкахъ индусовъ ясно проглядываетъ ихъ пристрастіе къ большимъ числамъ. Здѣсь мы находимъ разсказъ про одного короля, который обладалъ тысячей биллліоновъ алмазовъ, про битву, въ которой сражалось десять тысячъ секстилліоновъ обезьянъ; такого количества обезьянъ не могла бы вмѣстить наша планетная система, даже если бы вся она была биткомъ набита обезьянами. Тамъ же говорится, что существуетъ 24 000 биллліоновъ боговъ, и что Будда имѣлъ 600 000 милліоновъ сыновей. Ни у какого другого народа мы не находимъ этого

стремленія выражать возвышенное посредствомъ большихъ чиселъ. Единственный примѣръ большихъ чиселъ, какой мы находимъ въ древней Греціи, это Архимедово исчисленіе песчинокъ (ψαμμίτης): въ этомъ сочиненіи Архимедъ вычисляетъ, сколько песчинокъ оказалось бы во вселенной, если бы она была въ опредѣленное указанное число разъ больше земли. Однако же Архимедъ взялся за это вычисленіе не для того, чтобы щеголять большими числами: онъ желалъ показать, что неправильно говорятъ о безчисленномъ множествѣ песчинокъ, и что рядъ чиселъ не имѣетъ верхней границы, хотя у насъ и не имѣется простыхъ числительныхъ для краткаго словеснаго выраженія большихъ чиселъ. Пристрастіе индусовъ къ чрезмѣрно большимъ числамъ сказалось еще сильнѣе послѣ того, какъ въ IV столѣтіи нашей эры индусскіе брамины изобрѣли современную систему нумераціи, которая основана на томъ, что цифра, смотря по занимаемому ею мѣсту, обозначаетъ либо одно число, либо въ десять разъ бо́льшее, либо въ сто разъ большее, и т. д., мѣсто же недостающаго разряда заполняется особеннымъ знакомъ — нулемъ. Этотъ принципъ, которому слѣдуютъ теперь при изображеніи чиселъ всѣ народы, обладающіе какой-либо нумераціей, даетъ возможность изобразить всякое сколь угодно большое число съ помощью десяти знаковъ, а именно десяти знаковъ для чиселъ отъ

нуля до девяти; такой возможности не даетъ намъ, напримѣръ, римская система счисленія, въ которой необходимо постоянно вводить новые знаки для изображенія все болѣе и болѣе возрастающихъ чиселъ. Индусская система нумераціи съ ея удобными методами счисленія перешла въ восьмомъ столѣтіи къ арабамъ, отъ которыхъ она въ X — XII столѣтіяхъ перешла къ христіанскимъ народамъ Европы. Но лишь къ эпохѣ Реформаціи индусская система нумераціи пустила прочные корни въ народномъ обиходѣ. Къ этому времени, въ 16 столѣтіи, выдвинулись люди съ большими ариѳметическими талантами, каковы Адамъ Ризе и Людольфъ фанъ Цейленъ (Ludolf van Ceulen); они умѣли дѣлать правильныя вычисленія съ очень большими числами. Хотя въ настоящее время мы не питаемъ особаго пристрастія къ большимъ числамъ, какое проявляли индусы, все же и у насъ пробуждается интересъ къ большимъ числамъ, когда они относятся къ такимъ вещамъ, которыя въ небольшомъ числѣ намъ хорошо знакомы.

1. Игра скатъ, въ которой 32 карты распредѣляются между тремя игроками такимъ образомъ, что каждый получаетъ по 10 картъ, а двѣ карты откладываются въ сторону, даетъ поводъ, поставить вопросъ о томъ, сколькими способами можно распредѣлить 32 карты указаннымъ образомъ; другими словами, сколько возможно различныхъ игръ въ

скатъ? На этотъ вопросъ теорія соединеній отвѣчаетъ, что искомое число равно

$$\frac{32!}{10!\ 10!\ 10!\ 2!},$$

при чемъ символъ a! обозначаетъ произведеніе всѣхъ чиселъ отъ 1 до a включительно. Вычисливъ это выраженіе, найдемъ, что искомое число равно 2753 биллiонамъ 264408 милліонамъ и 504640.

Чтобы получить нѣкоторое представленіе о величинѣ этого числа, мы прибавимъ слѣдующее. Если бы все живущее человѣчество только тѣмъ и занималось, что день и ночь играло бы въ скатъ, при чемъ въ игрѣ участвовало бы по три партнера, оканчивающихъ въ среднемъ каждыя пять минутъ одну игру, то потребовалось бы отъ 52 до 53 лѣтъ на то, чтобы исчерпать вышеуказанное число всевозможныхъ способовъ распредѣленія картъ. Если бы эту задачу пришлось разрѣшать однимъ лишь жителямъ Альтенбурга, родины игры въ скатъ, то имъ понадобилось бы потратить отъ пятисотъ до шестисотъ тысячъ лѣтъ прежде, чѣмъ они могли бы сказать, что въ Альтенбургѣ сыграна каждая мыслимая игра въ скатъ. Прибавимъ къ этому, что между 2753 биллiонами (въ кругломъ счетѣ) игръ находится 655 биллiоновъ, т. е. 22—33% такихъ, въ которыхъ валетъ лежитъ въ скатѣ, т. е. принадлежитъ къ числу двухъ отложенныхъ картъ, но врядъ ли наберется 4 милліона такихъ игръ, т. е. одна 700-

милліонная часть всѣхъ игръ), въ которыхъ одинъ изъ партнеровъ могъ бы играть трефъ соло съ 11 матадорами.

2. Гораздо больше, чѣмъ въ скатѣ, оказывается число всевозможныхъ способовъ распредѣленія картъ въ вистѣ; въ этой игрѣ 52 карты распредѣляются между 4 игроками, такъ что каждый получаетъ по 13 картъ. Чтобы найти искомое число, нужно вычислить выраженіе

$$\frac{52!}{13!\ 13!\ 13!\ 13!}.$$

Мы получимъ

53644 квадрилліоновъ,
737765 трилліоновъ,
488792 билліоновъ,
839237 милліоновъ
и 440000.

Слѣдующій примѣръ дастъ, можетъ быть, нѣкоторое представленіе о величинѣ этого числа. Если бы вся поверхность земного шара, включая горы и океаны, была покрыта столиками для игры въ вистъ, при чемъ каждый столикъ съ четырьмя партнерами занималъ бы всего одинъ квадратный метръ, и если бы за каждымъ столикомъ безпрестанно играли въ вистъ,—одну игру въ пять минутъ, то должно пройти болѣе тысячи милліоновъ лѣтъ, прежде чѣмъ на этой сплошь покрытой карточными столиками землѣ будутъ разыграны всѣ мыслимыя комбинаціи изъ 52 картъ.

http://rutracker.ru

3. Въ обоихъ предшествующихъ примѣрахъ теорія соединеній приводила насъ къ большимъ числамъ Столь же большія числа могутъ быть получены изъ разсмотрѣнія геометрическихъ прогрессій. Наибольшей извѣстностью пользуется примѣръ, содержащійся въ разсказѣ о наградѣ, которую долженъ былъ получить изобрѣтатель шахматной игры. Это преданіе, которое возникло въ Индіи, родинѣ шахматной игры и большихъ чиселъ, и въ теченіе ряда вѣковъ приводится во всѣхъ учебникахъ ариѳметики, гласитъ слѣдующее. Одинъ индусскій король по имени Шерамъ (Shehram) предложилъ изобрѣтателю шахматной игры Сесса Эбнъ-Дагеру (Sessa Ebn Daher) выбрать самому себѣ награду за свое изобрѣтеніе. Тогда изобрѣтатель попросилъ дать ему такое число пшеничныхъ зеренъ, какое пришлось бы на шахматную доску, если бы положить на первую клѣтку одно зерно, на вторую — два, на третью — четыре и т. д., вообще — на каждое послѣдующее поле въ два раза больше, чѣмъ на предыдущее. Король охотно обѣщалъ дать эту, какъ онъ предполагалъ, весьма скромную награду. Когда же требуемое число было высчитано, то оно оказалось равнымъ $2^{64} - 1$, что составляетъ

18 трилліоновъ,
446744 билліона,
073709 милліоновъ
и 551615.

http://mathesis.ru

Король не могъ исполнить своего обѣщанія; онъ не могъ бы его исполнить даже и въ томъ случаѣ, если бы онъ обладалъ всей землей и всю свою жизнь безпрестанно сѣялъ бы и пожиналъ пшеницу. Дѣйствительно, если равномѣрно посыпать поверхность всей суши земного шара пшеничными зернами, то, какъ оказывается, упомянутаго числа зеренъ хватило бы на слой толщиной въ девять миллиметровъ.

4. Къ степенямъ числа 2 приводитъ также вопросъ о числѣ предковъ какого-либо нынѣ живущаго человѣка А. Онъ имѣетъ двухъ родителей, слѣдовательно 4 прародителей, 8 прапрародителей, 16 прапрапрародителей и т. д. Если мы условимся называть родителей предками перваго порядка, прародителей—предками второго порядка, и т. д., то окажется, что А имѣетъ 2^n предковъ n-го порядка. Съ другой стороны, можно принять, что на каждые сто лѣтъ приходится три поколѣнія, и, слѣдовательно, сто лѣтъ тому назадъ предки лица А были въ томъ же возрастѣ, какой теперь имѣетъ А. Итакъ, сто лѣтъ тому назадъ жили восемь предковъ А, двѣсти лѣтъ тому назадъ 64 и т. д. Такимъ образомъ, мы найдемъ, что 1900 лѣтъ тому назадъ, т. е. въ началѣ нашей эры, жило 8^{19} предковъ А. Это составитъ приблизительно 144000 билліоновъ людей. Но для такого числа людей не нашлось бы мѣста на всей поверхности земного шара, даже если

бы мы пожелали допустить, что вся поверхность земли, включая горы, океаны и пустыни, сплошь покрыта тѣсно прижатыми другъ къ другу предками лица А. Дѣйствительно, для того, чтобы на земной поверхности помѣстилось 144000 билліоновъ людей, на каждомъ квадратномъ дециметрѣ должно находиться 2—3 человѣка, что невозможно. Мы видимъ отсюда, что въ нашемъ разсужденіи гдѣ-то кроется ошибка. Мы найдемъ ее, если вспомнимъ о родствѣ между людьми, хотя бы его и не всегда возможно было прослѣдить. Правда, обыкновенно человѣкъ имѣетъ 8 прародителей; но имѣетъ ли онъ 16 различныхъ прапрародителей, уже подлежитъ сомнѣнію, такъ какъ благодаря бракамъ между родственниками число 16 можетъ упасть до 14 и еще ниже. Идя такимъ образомъ все далѣе и далѣе, мы заключаемъ, что весьма невѣроятно, чтобы какой-нибудь человѣкъ имѣлъ 2^{20} различныхъ предковъ 20-го порядка. Итакъ, при переходѣ отъ одного порядка предковъ къ слѣдующему, не всегда нужно удваивать число предковъ. Во всякомъ случаѣ число предковъ лица А, жившихъ 1900 лѣтъ тому назадъ, не могло превышать числа всѣхъ людей, жившихъ тогда на землѣ; такъ какъ послѣднее число навѣрно не превышало 2000 милліоновъ, то уже отсюда слѣдуетъ, что на протяженіи 1900 лѣтъ у предковъ лица А очень часто происходили браки между лицами, находившимися въ родствѣ, хотя бы послѣднее и не было доказуемо.

5. Такъ какъ вычисленіе сложныхъ процентовъ основано на геометрическихъ прогрессіяхъ, то мы придемъ къ очень большимъ числамъ, если предположимъ, что капиталъ, отданный на сложные проценты, нарасталъ въ теченіе долгаго промежутка времени. Особенно извѣстенъ примѣръ съ копейкой [5]), отданной въ ростъ на сложные проценты во время рожденія Христа. Слѣдующія соображенія покажутъ намъ, какія чудовищныя денежныя суммы получаются при нарастаніи капитала въ теченіе нѣсколькихъ столѣтій. Если считать по $4^{7}/_{10}$ процента, то капиталъ увеличивается въ сто разъ каждыя сто лѣтъ; этотъ фактъ легко запомнить. Поэтому черезъ 200 лѣтъ одна копейка превратится въ 100 рублей, черезъ 300 лѣтъ — въ 100^2 рублей, черезъ 400 лѣтъ — въ 100^3 рублей и т. д., т. е. въ 1900 лѣтъ мы будемъ имѣть 100^{18} рублей, т. е. секстиллiонъ рублей; это число рублей въ двѣсти милліоновъ разъ больше числа граммовъ, выражающаго вѣсъ земли. Если мы будемъ считать по 4 сложныхъ процента и время наращенія одной копейки примемъ равнымъ всего 1875 годамъ, то по истеченіи этого времени мы будемъ имѣть такой капиталъ:

865 986 квадрилліоновъ
626 476 трилліоновъ,
236 508 билліоновъ,
270 156 милліоновъ,
786 660 рублей и 24 копейки.

http://mathesis.ru

Чтобы получить приблизительное представленіе о величинѣ этой суммы, вообразимъ, что вся масса нашей земли состоитъ изъ золота такой же пробы, какъ нѣмецкая монета въ 20 марокъ. Въ этомъ случаѣ цѣнность выше представленнаго капитала была бы равна 84 такимъ золотымъ земнымъ шарамъ. Если будемъ считать не по 4 процента, а по 5, то мы получимъ еще гораздо большую сумму денегъ. Чтобы представить цѣнность такого капитала, понадобилось бы цѣлыхъ 5191 милліонъ указанныхъ золотыхъ шаровъ величиною въ землю.

6. Если, наоборотъ, дана сумма геометрической прогрессіи со знаменателемъ, превышающимъ единицу, то мы обыкновенно переоцѣниваемъ соотвѣтствующее число членовъ. Пояснимъ это примѣромъ. Предположимъ, что въ 9 часовъ утра обнаруживается убійство. Человѣкъ, обнаруживший его, въ теченіе четверти часа между 9 и $9^1/_4$ успѣваетъ сообщить объ убійствѣ тремъ лицамъ. Допустимъ далѣе, что каждое изъ этихъ трехъ лицъ въ теченіе слѣдующей четверти часа передаетъ вѣсть тремъ новымъ лицамъ, при чемъ вѣсть продолжаетъ распространяться такимъ же образомъ, т. е. каждый, услышавшій ее, встрѣчаетъ въ теченіе четверти часа три лица, которымъ онъ сообщаетъ эту вѣсть и для которыхъ она является новостью. Если бы возможно было, чтобы всѣ населяющіе землю 1500—1700 милліоновъ людей получали это извѣстіе непремѣнно

указаннымъ путемъ, то уже въ тотъ же день въ $1^3/_4$ часа пополудни всѣ обитатели земного шара были бы освѣдомлены о происшедшемъ. Дѣйствительно, по истеченіи 19 четвертей часа извѣстіе дошло до такого числа людей, какое равно суммѣ членовъ слѣдующаго ряда:

$$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{19}.$$

Но эта сумма равна $\frac{1}{2}(3^{20} - 1)$, или

1743 милліонамъ и 392200,

и, слѣдовательно, превышаетъ 1700 милліоновъ.

7. Методы, служащіе для измѣренія силы свѣта, указываютъ намъ, что дѣйствіе солнечнаго свѣта на землю равно дѣйствію 60000 стеариновыхъ свѣчей въ точкѣ, находящейся всего лишь на разстояніи 1 метра отъ источника свѣта. Такъ какъ извѣстно, что яркость свѣта обратно пропорціональна квадрату разстоянія, то можно вычислить, сколько стеариновыхъ свѣчей должно было бы горѣть въ томъ мѣстѣ, гдѣ находится солнце, чтобы дѣйствіе ихъ на землю было равно дѣйствію солнца. Мы найдемъ, что число свѣчей равно приблизительно

1350 квадрилліонамъ.

Но такъ какъ земля вѣситъ всего 5 квадрилліоновъ килограммовъ, то, будь она даже вся стеариновая, массы ея не хватало бы для изготовленія названнаго числа свѣчей.

8. Въ нашъ вѣкъ бактерій не лишено интереса узнать, сколько всего бактерій, по большей мѣрѣ,

http://mathesis.ru

можетъ быть на землѣ. Съ этой цѣлью мы будемъ представлять себѣ земную кору, какъ полый шаръ, наружная сфера котораго имѣетъ радіусъ въ 869 миль, а внутренняя—всего въ 860 миль. Объемъ тѣла, ограниченнаго этими сферами, равенъ 35 300 квадрилліонамъ кубическихъ миллиметровъ. Если мы примемъ, что одинъ кубическій миллиметръ содержитъ, въ среднемъ, милліонъ бактерій, то окажется, что на всемъ земномъ шарѣ число бактерій никакъ не превышаетъ 35300 квинтилліоновъ.

9. Чтобы получить представленіе о той степени точности, съ которой опредѣляется число, когда мы знаемъ сто или болѣе десятичныхъ знаковъ его, разсмотримъ слѣдующій примѣръ. Число π, указывающее, во сколько разъ длина окружности больше ея діаметра, немного больше, чѣмъ 3, и, если ограничиться первыми 6-ью десятичными знаками, величина его выразится числомъ

$$3{,}141592\ldots;$$

это значитъ, что π больше, чѣмъ 3,141592, но меньше, чѣмъ, 3,141593. Такъ какъ π есть ирраціональное число, то невозможно представить его точно въ видѣ конечной десятичной дроби. Но съ каждымъ прибавочнымъ десятичнымъ знакомъ степень точности увеличивается въ 10 разъ. Хотя во всѣхъ приложеніяхъ вполнѣ достаточно взять отъ семи до десяти знаковъ, но все же въ настоящее время вычислено болѣе 500 десятичныхъ знаковъ числа π. Слѣ-

дующій примѣръ пояснитъ намъ, какую степень точности даютъ намъ одни лишь первые сто знаковъ. Сиріусъ удаленъ отъ насъ на разстояніе въ 83 милліона милліоновъ миль. Вообразимъ сферу, проходящую черезъ Сиріусъ и имѣющую свой центръ въ центрѣ земного шара; вообразимъ, что этотъ чудовищно большой шаръ наполненъ бактеріями въ такомъ количествѣ, что на каждый кубическій миллиметръ приходится милліонъ милліоновъ бактерій. Въ такомъ случаѣ число всѣхъ бактерій въ шарѣ изобразится 74 цифрами. Представимъ себѣ, что они распакованы и размѣщены по прямой линіи такимъ образомъ, что разстояніе между каждыми двумя сосѣдними равно разстоянію Сиріуса отъ земли, т. е. 83 билліонамъ миль. Такимъ образомъ мы получимъ длину, содержащую столько миль, сколько единицъ содержится въ произведеніи 74-значнаго числа бактерій на 83 билліона. Примемъ это разстояніе за діаметръ окружности, длину которой мы затѣмъ можемъ опредѣлить двоякимъ путемъ: во-первыхъ, дѣйствительнымъ измѣреніемъ и, во-вторыхъ, умноженіемъ діаметра на π, при чемъ мы ограничимся первыми ста десятичными знаками числа π. Тогда оба результата, выражающіе длину окружности, должны отличаться другъ отъ друга, такъ какъ при умноженіи мы приняли во вниманіе лишь первые сто знаковъ числа π. Вслѣдствіе чрезвычайно огромныхъ размѣровъ окружности, неточность должна будетъ

сказаться съ чрезвычайной рѣзкостью. Тѣмъ не менѣе оказывается, что разница между результатомъ, который даетъ намъ дѣйствительное измѣреніе, и произведеніемъ діаметра на число π, взятое со ста десятичными знаками, не составитъ даже одной милліонной доли миллиметра.

10. Въ заключеніе замѣтимъ, что ариѳметика даетъ намъ возможность съ помощью всего лишь трехъ цифръ изобразить число, далеко превосходящее то число, которое мы получили бы, если бы перемножили всѣ числа, которыя до сихъ поръ у п о м я н у т ы въ настоящемъ параграфѣ, и полученное произведеніе умножили на квадрилліонъ, послѣднее произведеніе опять умножили бы на квадрилліонъ и милліонъ разъ продѣлали бы такое послѣдовательное умноженіе на квадрилліонъ. Число, которое мы получили бы такимъ путемъ, гораздо меньше числа

$$9.^{9^9}$$

Дѣйствительно, это число представляетъ собою произведеніе 9^9 множителей, изъ коихъ каждый равенъ 9. Но число $9^9 = 9.9.9.9.9.9.9.9.9 = 387$ милліонамъ 420489, и такое именно число разъ нужно взять множителемъ число 9, чтобы получить число

$$9.^{9^9}$$

http://mathbook.ru

Такъ какъ человѣческой жизни недостаточно для того, чтобы опредѣлить это число, то мы ограничимся указаніемъ числа цифръ, посредствомъ которыхъ пишется наше число. Это число цифръ несомнѣнно превышаетъ 369 милліоновъ и 690000, но меньше 369 милліоновъ и 700000. Если бы мы пожелали написать это число, то для этого нужна была бы длина отъ $18484\frac{1}{2}$ до 18485 километровъ, при чемъ цифры пришлось бы писать настолько близко другъ къ другу, чтобы въ каждомъ дециметрѣ помѣщалось 20 цифръ.

http://mathesis.ru

§ 5.

Отгадываніе числа очковъ прикрытыхъ картъ.

Весьма извѣстный карточный фокусъ, состоящій въ отгадываніи суммы очковъ прикрытыхъ картъ, основанъ на простомъ ариѳметическомъ преобразованіи. Этотъ фокусъ выполняется большей частью съ 32 картами слѣдующимъ образомъ. Предлагаемъ кому-нибудь выбрать три карты и положить ихъ лицевой стороной внизъ отдѣльно другъ отъ друга, а затѣмъ просимъ считать отъ числа очковъ первой изъ трехъ картъ до 11 и при каждомъ отсчитываемомъ числѣ накладывать на нее по картѣ, такъ что выбранная карта станетъ нижнею картою одной кучки. То же предлагаемъ сдѣлать съ другими двумя выбранными картами. Затѣмъ мы просимъ дать намъ оставшіяся карты, и по числу ихъ можно узнать сумму очковъ трехъ выбранныхъ картъ, самыхъ нижнихъ въ трехъ образовавшихся кучкахъ, а именно: нужно прибавить 4 къ числу полученныхъ картъ, и тогда мы получимъ искомую сумму очковъ. Будемъ считать, что тузъ имѣетъ 11 очковъ, король — 4, дама — 3, валетъ — 2, а десятка, девятка, восьмерка и семерка — соотвѣтственно по 10, 9, 8 и 7 очковъ.

Предположимъ, что были выбраны слѣдующія нижнія карты: король, восьмерка и тузъ. Въ такомъ случаѣ лицо, выбравшее эти карты, должно при составленіи первой кучки считать короля за четыре и отсчитать далѣе отъ 5 до 11, т. е. прибавить семь картъ. Такимъ же образомъ, чтобы достигнуть предѣла 11, ему придется наложить три карты на восьмерку. На тузъ же онъ не долженъ будетъ наложить ни одной карты, потому что тузъ одинъ считается за 11. Поэтому въ первой кучкѣ будетъ 8 картъ, во второй — четыре, въ третьей — одна, и мы, слѣдовательно, должны будемъ получить отъ него столько картъ, сколько заключается единицъ въ числѣ 32, уменьшенномъ на $8 + 4 + 1$, т. е. 19 картъ. Но $19 + 4$ даетъ 23; слѣдовательно сумма очковъ трехъ нижнихъ картъ должна быть 23. На самомъ дѣлѣ $4 + 8 + 11 = 23$.

Если, во-вторыхъ, мы имѣемъ 52 карты, при чемъ каждый изъ четырехъ тузовъ считается за 11, каждая изъ 12 фигуръ — за 10, а прочія карты оцѣниваются каждая числомъ изображенныхъ на ней очковъ, и если опять составляютъ три кучки, считая при этомъ до 18, — то слѣдуетъ только прибавить 5 къ числу оставшихся картъ, чтобы получить сумму очковъ нижнихъ картъ трехъ кучекъ. Для примѣра предположимъ, что внизъ были положены пятерка, десятка и король. Тогда къ пятеркѣ придется присоединить еще 13 картъ, къ десяткѣ — восемь и

столько же къ королю, такъ какъ онъ тоже считается за 10; такимъ образомъ, въ первой кучкѣ будутъ находиться 14 картъ, во второй—девять и въ третьей—девять. Такимъ образомъ, для составленія трехъ кучекъ понадобятся 32 карты. Поэтому 20 картъ будутъ намъ возвращены. Прибавивъ къ этому числу 5, мы получимъ дѣйствительную сумму 25, составленную изъ чиселъ 5, 10 и 10.

Легко понять, что въ этомъ фокусѣ безразлично, какое значеніе мы приписываемъ каждой картѣ, и что число, которое мы должны прибавить къ числу возвращаемыхъ намъ картъ, чтобы получить сумму очковъ нижнихъ картъ, зависитъ лишь отъ числа всѣхъ картъ n, отъ числа h кучекъ, которыя нужно составить, и отъ суммы z всѣхъ предѣльныхъ чиселъ, до которыхъ нужно считать при составленіи каждой изъ h кучекъ. Нетрудно выразить эту зависимость при помощи формулы. Числа очковъ въ нижнихъ картахъ h кучекъ обозначимъ соотвѣтственно черезъ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_h$, число картъ въ каждой кучкѣ — черезъ $b_1, b_2, \ldots, b_h$, и, наконецъ, черезъ $z_1, z_2, \ldots, z_h$ обозначимъ предѣльныя числа, до которыхъ нужно считать при составленіи каждой кучки. Тогда мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= z_1 + 1; \\ a_2 + b_2 &= z_2 + 1; \\ &\cdots \\ a_h + b_n &= z_h + 1. \end{aligned}$$

http://mathesis.ru

Сложивъ почленно эти h равенствъ и введя обозначенія

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_h = a, \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_h = b,$$
$$z_1 + z_2 + \cdots + z_h = z,$$

мы получимъ:

$$a + b = z + h.$$

Но число b картъ, взятыхъ для составленія кучекъ равно избытку числа n всѣхъ имѣющихся картъ надъ числомъ r оставшихся и возвращаемыхъ намъ картъ, т. е. равно n—r. Слѣдовательно,

$$a + n - r = z + h,$$

или

$$a = z + h + r - n.$$

Въ первомъ изъ двухъ примѣровъ мы имѣемъ $n = 32$, $h = 3$, $z = 3 . 11 = 33$; слѣдовательно, мы получимъ согласно только-что выведенной формулѣ

$$a = r + 4.$$

Во второмъ примѣрѣ $n = 52$, $h = 3$, $z = 3 . 18 = 54$. Такимъ образомъ, мы найдемъ, что

$$a = r + 5.$$

Такъ какъ желательно, чтобы у насъ оказалось достаточное число картъ для составленія кучекъ, и чтобы, сверхъ того, осталась, по крайней мѣрѣ, еще одна карта, то необходимо, чтобы было $z < n$. [6]).

http://mathesis.ru

Далѣе, наибольшее значеніе, какое можетъ имѣть какая-либо карта, не должно, конечно, превышать наименьшаго изъ предѣльныхъ чиселъ $z_1, z_2, \ldots, z^h$. Поэтому предѣльныя числа должны удовлетворять нѣкоторымъ условіямъ, каковыя мы установимъ для того случая, когда $z_1 = z_2 = \cdots = z_h$ и, слѣдовательно, $z = hz_1$, и когда наименьшее значеніе карты равно 1, а наибольшее равно 11. Для того, чтобы у насъ оставалась, по крайней мѣрѣ, одна карта, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $z = hz_1 < n$; съ другой стороны, чтобы общее предѣльное число не было меньше наибольшаго значенія, какое у насъ можетъ имѣть карта, т. е. 11, необходимо также, чтобы было $z_1 \geqslant 11$. Такимъ образомъ, число z_1 должно удовлетворять слѣдующимъ предѣльнымъ условіямъ:

$$11 \leqslant z_1 < \frac{n}{h}.$$

Отсюда слѣдуетъ, напримѣръ, что въ случаѣ 32 картъ и 3 кучекъ нѣтъ значенія z_1, удовлетворяющаго выведеннымъ условіямъ. При 52 картахъ и 4 кучкахъ число z_1 можетъ быть равно 11 или 12. Замѣтимъ, что число n картъ можно взять совершенно произвольно, и что карты не должны обязательно образовать полной игры, но могутъ быть выбраны совершенно произвольно. Чтобы разнообразить этотъ фокусъ, удобно взять побольше картъ, — все равно, какихъ, — чтобы можно

было составить побольше кучекъ. Напримѣръ, если въ нашемъ распоряженіи находится сто картъ, то какъ показываютъ приведенныя предѣльныя условія, число кучекъ можно довести до девяти; условія даютъ намъ $z_1 = 11$ при $n = 100$ и $h = 9$.

---

http://mathesis.ru

§ 6.

Задачи на переливаніе.

Задачи, которыми мы сейчасъ займемся, встрѣчаются со времени появленія классическаго сочиненія Баше*) не только въ различныхъ книгахъ, содержащихъ ариѳметическія развлеченія, но и въ календаряхъ и дѣтскихъ книгахъ, а въ послѣднее время онѣ появляются въ журналахъ для легкаго чтенія и въ провинціальныхъ газетахъ. Въ этихъ задачахъ предполагается, что имѣется лишь ограниченное число сосудовъ, вмѣщающихъ каждый опредѣленное число литровъ, при чемъ стѣнки сосудовъ не раздѣлены черточками, по которымъ можно было бы судить, какая часть сосуда наполнена. Съ помощью такихъ сосудовъ нужно путемъ повторныхъ переливаній налить опредѣленное число литровъ въ тотъ или другой сосудъ. Чаще всего рѣчь идетъ о молокѣ или винѣ. Обыкновенно въ этихъ задачахъ предполагается, что имѣется всего лишь три сосуда различной величины, что самый большой изъ нихъ наполненъ до краевъ, а два другихъ совершенно пусты: требуется путемъ повторныхъ переливаній

*) Раньше Баше этой задачей занимался Тарталіа въ началѣ XVI столѣтія, а въ 1803 г. Озанамъ вновь извлекъ ее на свѣтъ Божій.

http://rutracker.ru

жидкости, наполняющей самый большой сосудъ, раздѣлить ее на двѣ равныя части такъ, чтобы одна половина оказалась въ наибольшемъ сосудѣ, а другая — въ слѣдующемъ за нимъ по величинѣ. Баше (1612) выражаетъ задачу такъ: „два друга должны подѣлить межъ собой 8 мѣръ вина, находящагося въ сосудѣ вмѣстимостью въ 8 мѣръ; кромѣ этого сосуда, они имѣютъ еще два сосуда, одинъ въ 5 мѣръ, другой въ 3 мѣры. Какимъ путемъ могутъ они точно подѣлить между собой вино поровну, пользуясь исключительно лишь этими тремя сосудами?“ Баше даетъ два рѣшенія этой задачи, и мы приведемъ ихъ здѣсь, замѣнивъ мѣры литрами.

1. Слѣдуетъ наливать вино въ пятилитровый сосудъ, пока онъ не будетъ совершенно полонъ; изъ послѣдняго слѣдуетъ переливать вино въ трехлитровый сосудъ, наполняя его до краевъ, такъ что во второмъ по величинѣ сосудѣ останется два литра. Теперь нужно перелить содержимое самаго малаго сосуда въ наибольшій: тогда въ послѣднемъ окажется 6 литровъ. Въ опорожненный наименьшій сосудъ вливаютъ два литра, оставшихся во второмъ по величинѣ сосудѣ. Послѣдній затѣмъ наполняютъ до краевъ виномъ изъ наибольшаго сосуда, такъ что теперь наши три сосуда, начиная съ наибольшаго, содержатъ по порядку 1, 5 и 2 литра. Теперь переливаютъ вино изъ второго сосуда въ наименьшій, пока послѣдній не наполнится. Тогда во второмъ

сосудѣ останется 4 литра. Слѣдуетъ лишь перелить еще три литра изъ наименьшаго сосудъ въ наибольшій, и мы раздѣлимъ наши 8 литровъ пополамъ.

2. Въ другомъ рѣшеніи Б а ш е предписывается наполнить до краевъ наименьшій сосудъ и затѣмъ перелить эти три литра въ средній сосудъ. Вновь наполняютъ наименьшій сосудъ, наливая въ него вино изъ наибольшаго, такъ что въ послѣднемъ тогда останется 2 литра. Теперь переливаютъ вино изъ наименьшаго сосуда въ средній, пока онъ не наполнится, и затѣмъ переливаютъ все содержимое средняго сосуда въ наибольшій, который теперь содержитъ 7 литровъ, между тѣмъ какъ въ наименьшемъ будетъ одинъ. Этотъ литръ переливаютъ теперь въ средній сосудъ. Наконецъ, наполняютъ наименьшій сосудъ виномъ изъ наибольшаго, такъ что въ послѣднемъ будутъ содержаться 4 литра. Остается лишь перелить три литра, наполняющіе наименьшій сосудъ, въ средній, и задача наша рѣшена.

Эти рѣшенія можно представить въ болѣе наглядномъ и краткомъ видѣ, если построить таблицы, въ которыхъ тремъ сосудамъ отведены три колонны, и писать въ строкахъ этихъ колоннъ числа, послѣдовательно указывающія, сколько литровъ находится въ сосудахъ послѣ каждаго переливанія. Въ дальнѣйшемъ мы постоянно будемъ пользоваться этимъ сокращеннымъ способомъ. Три сосуда мы соотвѣтственно будемъ обозначать черезъ A, B и C, при

1.

A (8)	B (5)	C (3)
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

2.

A (8)	B (5)	C (3)
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

чемъ А обозначаетъ наибольшій сосудъ, В — второй по величинѣ, а С — третій. Вмѣстимость каждаго сосуда въ литрахъ мы будемъ выражать числами, заключенными въ скобки и помѣщенными подъ буквами А, В и С. Такимъ образомъ, оба вышеизложенныя рѣшенія представляются въ видѣ наглядныхъ таблицъ, которыя мы здѣсь прилагаемъ.

Задачу Баше на переливаніе можно обобщить въ трехъ различныхъ направленіяхъ:

1. Вмѣсто чиселъ (8), (5) и (3) можно выбрать другія произвольныя числа, которыя указывали бы, сколько литровъ должны вмѣщать сосуды А, В и С.

2. Можно поставить себѣ цѣлью не раздѣленіе на равныя части, но полученіе любого возможнаго числа литровъ.

3. Можно предположить, что въ нашемъ распоряженіи находится не три сосуда, а бо́льшее число.

Третье направленіе представляется наименѣе

http://mathesis.ru

интереснымъ, такъ какъ нахожденіе рѣшенія становится слишкомъ легкимъ, а число возможныхъ рѣшеній слишкомъ большимъ. Поэтому мы не будемъ здѣсь подробнѣе развивать задачу въ указанномъ направленіи, но приведемъ лишь примѣръ, который мы заимствуемъ изъ книги Болла „Mathematical recreations“. Предположимъ, что сосудъ A, наполненный жидкостью, вмѣщаетъ 24 литра, а порожніе сосуды B, C и D могутъ вмѣстить соотвѣтственно 13, 11 и 5 литровъ. Требуется раздѣлить переливаніемъ 24 литра на три равныя части. На таблицѣ представлено одно весьма краткое рѣшеніе задачи. Боллъ въ своей книгѣ высказываетъ мысль, что подобныя задачи на переливаніе не могутъ быть рѣшены математически, но рѣшаются лишь путемъ испытаній; тѣмъ не менѣе авторъ въ рядѣ своихъ статей о математическихъ играхъ (Naturw. Wochenschr. 1891—94) попытался критически разработать задачу на переливаніе въ отношеніи двухъ первыхъ изъ трехъ вышеуказанныхъ направленій, въ которыхъ задача можетъ быть обобщена. Числа, выражающія вмѣстимость сосудовъ A, B и

A	B	C	D
(24)	(13)	(11)	(5)
24	0	0	0
13	0	11	0
8	0	11	5
0	8	11	5
11	8	0	5
16	8	0	0
16	0	8	0
3	13	8	0
3	8	8	5
8	8	8	0

lib.mathesis.ru

С въ литрахъ, обозначимъ соотвѣтственно черезъ a, b, c. Прежде всего легко понять, что при переливаніи можетъ происходить лишь одно изъ двухъ: либо мы совершенно опорожняемъ сосудъ, изъ котораго мы переливаемъ, либо же мы цѣликомъ наполняемъ сосудъ, въ который мы переливаемъ. Поэтому, сколько бы разъ мы ни дѣлали переливаніе, ни разу не можетъ случиться, чтобы въ одно и тоже время не было ни одного совершенно пустого сосуда и ни одного совершенно наполненнаго. Поэтому, если въ какой-либо строкѣ нашей таблицы, изображающей результаты послѣдовательныхъ переливаній, нѣтъ ни одного нуля, то непремѣнно будетъ одно изъ двухъ: либо второе число этой строки равно b, либо же третье равно c. Первое же число въ разсматриваемомъ случаѣ не можетъ быть равно a, потому что въ задачѣ всегда предполагается, что имѣется всего лишь a литровъ жидкости. Если мы желаемъ получить посредствомъ переливанія всевозможныя числа литровъ отъ 1 до a, то мы должны, совершая послѣдовательно переливанія, стараться не натолкнуться вторично на такую группу чиселъ, съ которой мы уже одинъ разъ встрѣчались, потому что въ противномъ случаѣ переливанія, приведшія вторично къ этой группѣ, окажутся ненужными. Отыскивая методъ, дающій всевозможныя числа, мы должны въ частности слѣдить за тѣмъ, чтобы возможно позже возвратиться къ начальной группѣ

a, 0, 0. Можно найти нѣсколько методовъ, удовлетворяющихъ этому условію. Одинъ изъ нихъ содержится въ слѣдующихъ правилахъ: „Переливаютъ жидкость изъ сосуда A въ сосудъ C до наполненія послѣдняго и потомъ переливаютъ содержимое сосуда C въ B, затѣмъ снова льютъ изъ A въ C до наполненія послѣдняго, и опять переливаютъ содержимое сосуда C въ B. Въ такомъ порядкѣ нужно продолжать переливанія до тѣхъ поръ, пока сосудъ B не будетъ совершенно полонъ. Затѣмъ переливаютъ содержимое сосуда B въ сосудъ A, и, если въ сосудѣ C былъ еще остатокъ, то переливаютъ его въ B. Постоянно продолжая такимъ же образомъ далѣе, мы, въ концѣ концовъ, вернемся къ первоначальной группѣ, получивъ попутно всѣ числа литровъ, какія возможны. Спрашивается, однако, всегда ли будетъ въ сосудѣ A столько жидкости, чтобы можно было совершенно наполнить сосудъ C. Сосудъ A будетъ содержать наименьшее количество жидкости тогда, когда въ сосудѣ B будетъ b литровъ. Но тогда придется сдѣлать переливаніе изъ сосуда B въ сосудъ A. Если же въ сосудѣ B находится $b-1$ литровъ, а въ сосудѣ C совсѣмъ еще нѣтъ жидкости, то спрашивается, будетъ ли еще въ сосудѣ A достаточно жидкости, чтобы можно было совершенно наполнить сосудъ C. Такъ какъ всего имѣется a литровъ жидкости, то въ этомъ случаѣ въ сосудѣ A должно находиться $a-b+1$

литровъ. Это число должно быть не меньше числа c, т. е., пользуясь языкомъ ариѳметическихъ знакоположеній, должно быть:

$$a \geqq b + c - 1.$$

Если это условіе выполняется, то при помощи нашего способа мы получимъ въ сосудѣ B всѣ числа отъ 1 до b.[7]) Лишь въ томъ случаѣ, когда числа b и c имѣютъ общаго дѣлителя, отличнаго отъ единицы, нельзя получить всѣхъ чиселъ, а лишь тѣ, конечно, которыя также имѣютъ этого дѣлителя. Итакъ, до сихъ поръ мы нашли два условія: во-первыхъ, числа b и c не должны имѣть общаго дѣлителя, отличнаго отъ единицы, и, во-вторыхъ, число a должно быть не меньше, чѣмъ $b + c - 1$. Этимъ условіямъ удовлетворяютъ всѣ семь нижеслѣдующихъ примѣровъ. Разсматривая ихъ, слѣдуетъ замѣтить, что, когда въ сосудѣ C совсѣмъ нѣтъ жидкости, а въ сосудѣ B находятся y литровъ, то въ сосудѣ A должны содержаться $a - y$ литровъ, такъ что въ сосудѣ A должны встрѣчаться всѣ числа, превосходящія число b, если только $a - b \leqq b + 1$, т. е. если $a \leqq 2b + 1$. Но, если это третье условіе не выполнено, такъ что a больше удвоеннаго числа b, увеличеннаго на 1, то въ A естественно не встрѣчаются числа, которыя больше, чѣмъ b, но меньше, чѣмъ $a - b$. Все это относится къ случаю, когда сосудъ C пустъ. Но пустой сосудъ C можно наполнить жидкостью изъ сосуда A, откуда выте-

кается, что нѣкоторыя числа не будутъ встрѣчаться тогда только, когда $a - b - c \leqq b + 1$, т. е. когда $a \leqq 2b + c + 1$. Такимъ образомъ, мы нашли слѣдующій результатъ:

Вышеизложенный методъ наполненія даетъ всѣ числа отъ 1 до a, если b и c не имѣютъ общаго дѣлителя, отличнаго отъ единицы, и если, кромѣ того, выполняются условія, выраженныя слѣдующими неравенствами:

$$b + c - 1 \leqq a \leqq 2b + c + 1.$$

Во всѣхъ семи нижеслѣдующихъ примѣрахъ числа b и c не имѣютъ общаго дѣлителя, отличнаго отъ единицы, и всѣ они удовлетворяютъ также условію $b + c - 1 \leqq a$. Что касается третьяго условія $a \leqq 2b + c + 1$, то оно выполняется лишь въ примѣрахъ No. 1, 2, 3 и 4, но не въ примѣрахъ No. 5, 6 и 7. Поэтому въ этихъ послѣднихъ примѣрахъ нѣкоторыя числа не могутъ встрѣчаться.

http://mathesis.ru

No. 1.

A	B	C
(13)	(9)	(5)
13	0	0
8	0	5
8	5	0
3	5	5
3	9	1

12	0	1
12	1	0
7	1	5
7	6	0
2	6	5
2	9	2

11	0	2
11	2	0
6	2	5
6	7	0
1	7	5
1	9	3

10	0	3
10	3	0
5	3	5
5	8	0
0	8	5
0	9	4

9	0	4
9	4	0
4	4	5
4	9	0
13	0	0

http://mathesis.ru

No. 2.

A	B	C
(15)	(7)	(3)
15	0	0
12	0	3
12	3	0
9	3	3

9	6	0
6	6	3
6	7	2
13	0	2

13	2	0
10	2	3
10	5	0
7	5	3

7	7	1
14	0	1
14	1	0
11	1	3

11	4	0
8	4	3
8	7	0
15	0	0

http://mathesis.ru

No. 3.

A	B	C
(24)	(17)	(7)
24	0	0
17	0	7
17	7	0
10	7	7
10	14	0
3	14	7
3	17	4
20	0	4

20	4	0
13	4	7
13	11	0
6	11	7
6	17	1
23	0	1
23	1	0
16	1	7
16	8	0
9	8	7

9	15	0
2	15	7
2	17	5
19	0	5
19	5	0
12	5	7
12	12	0
5	12	7
5	17	2
22	0	2

22	2	0
15	2	7
15	9	0
8	9	7
8	16	0
1	16	7
1	17	6
18	0	6
18	6	0
11	6	7

11	13	0
4	13	7
4	17	3
21	0	3
21	3	0
14	3	7
14	10	0
7	10	7
7	17	0
24	0	0

http://rabfis.ru

No. 4.

A	B	C
(20)	(11)	(10)
20	0	0
10	0	10
10	10	0
0	10	10
0	11	9
11	0	9
11	9	0

1	9	10
1	11	8
12	0	8
12	8	0
2	8	10
2	11	7
13	0	7
13	7	0
3	7	10

3	11	6
14	0	6
14	6	0
4	6	10
4	11	5
15	0	5
15	5	0
5	5	10
5	11	4

16	0	4
16	4	0
6	4	10
6	11	3
17	0	3
17	3	0
7	3	10
7	11	2
18	0	2

18	2	0
8	2	10
8	11	1
19	0	1
19	1	0
9	1	10
9	11	0
20	0	0

http://mathesis.ru

No. 5.

A	B	C
(33)	(11)	(8)
33	0	0
25	0	8
25	8	0
17	8	8
17	11	5
28	0	5

28	5	0
20	5	8
20	11	2
31	0	2
31	2	0
23	2	8
23	10	0
15	10	8

15	11	7
26	0	7
26	7	0
18	7	8
18	11	4
29	0	4
29	4	0
21	4	8

21	11	1
32	0	1
32	1	0
24	1	8
24	9	0
16	9	8
16	11	6
27	0	6

27	6	0
19	6	8
19	11	3
30	0	3
30	3	0
22	3	8
22	11	0
33	0	0

http://mathesis.ru

No. 6.

A	B	C
(50)	(9)	(2)
50	0	0
48	0	2
48	2	0

46	2	2
46	4	0
44	4	2
44	6	0
42	6	2

42	8	0
40	8	2
40	9	1
49	0	1
49	1	0

47	1	2
47	3	0
45	3	2
45	5	0
43	5	2

43	7	0
41	7	2
41	9	0
50	0	0

No. 7.

A	B	C
(31)	(12)	(5)
31	0	0
26	0	5
26	5	0
21	5	5
21	10	0
16	10	5

16	12	3
28	0	3
28	3	0
23	3	5
23	8	0
18	8	5
18	12	1

30	0	1
30	1	0
25	1	5
25	6	0
20	6	5
20	11	0
15	11	5

http://rutracker.ru

15	12	4
27	0	4
27	4	0
22	4	5
22	9	0
17	9	5
17	12	2

29	0	2
29	2	0
24	2	5
24	7	0
19	7	5
19	12	0
31	0	0

Изъ прилагаемыхъ таблицъ видно, что въ No.No. 1, 2, 3 и 4 подъ буквой B встрѣчаются всѣ числа отъ 1 до b, а подъ буквой A всѣ числа отъ $b + 1$ до a; напротивъ, въ No.No. 5, 6 и 7 мы не встрѣчаемъ тѣхъ чиселъ, которыя превышаютъ число b, будучи менѣе числа $a - b - c$. Если въ каждомъ изъ трехъ послѣднихъ примѣровъ вставимъ передъ самымъ концомъ то переливаніе, послѣ котораго сосуды B и C будутъ одновременно совершенно наполнены, то эти примѣры будутъ содержать всѣ числа, какія только въ разсматриваемыхъ случаяхъ возможны.

Такъ, въ No. 7 подъ буквой B встрѣчаются всѣ числа отъ 1 до 12, подъ буквой A — всѣ числа отъ $31 - 12 - 5 = 14$ до 31, такъ что недостижимымъ оказывается лишь число 13. Если мы внимательно

разсмотримъ этотъ методъ переливанія, то увидимъ, что подъ буквой B, помимо нѣсколько разъ повторяющихся чиселъ 0 и b, находятся по порядку числа, кратныя c, начиная отъ $1 \times c$ до $b \times c$, уменьшенныя всякій разъ на b, т. е. мы находимъ здѣсь наименьшіе остатки отъ дѣленія $x.c$ на b, гдѣ x принимаетъ значенія отъ 1 до b. Такимъ образомъ, въ No. 3, гдѣ $c = 7$, $b = 17$, указанныя числа суть слѣдующія:

7, 14, 4, 11, 1, 8, 15, 5, 12, 2, 9, 16, 6, 13, 3, 10.

Намъ остается разсмотрѣть случай, который мы исключили въ предыдущихъ примѣрахъ, а именно, когда $a < b + c - 1$. Въ этомъ случаѣ подъ буквой B не могутъ получиться всѣ числа отъ 1 до b. Всѣ же тѣ числа, какія можно получить для сосуда B, мы найдемъ и въ этомъ случаѣ, примѣняя вышеописанный методъ и продолжая его примѣненіе до тѣхъ поръ, пока не натолкнемся на число, превышающее $a - c$. Всѣ другія числа, какія еще можно получить, будутъ имѣть мѣсто подъ буквой A, когда мы будемъ вычитывать изъ a числа, полученныя подъ буквой B, и когда мы наполнимъ содержимымъ сосуда A оба другихъ сосуда. Напримѣръ, если $a = 20$, $b = 13$, $c = 9$, то число a все же меньше числа $b + c - 1$, хотя и на одну лишь единицу. Слѣдуя нашему методу, мы получимъ подъ буквой B, кромѣ 0 и 13, числа, кратныя

девяти, уменьшенныя столько разъ на 13, сколько это возможно, т. е. числа

9, 5, 1, 10, 6, 2, 11, 7, 3, 12.

Но уже здѣсь на числѣ 12 рядъ обрывается: хотя слѣдующіе два числа 8 и 4 ариѳметически возможны, но при переливаніи эти числа не могутъ имѣть мѣста подъ буквой B; дѣйствительно, когда въ сосудѣ B находится 12 литровъ, а сосудъ C остается пустымъ, то въ сосудѣ A можетъ быть всего лишь 8 литровъ, а это количество недостаточно для наполненія сосуда C. Тѣмъ не менѣе, числа 8 и 4 все же получаются, но не подъ буквой B, а подъ буквой A, а именно въ видѣ разностей $20 - 12$ и $20 - 9 - 7$, потому что подъ буквой A должны встрѣчаться всѣ тѣ числа, которыя получаются при вычитаніи чиселъ предыдущаго ряда изъ 20 или изъ $20 - 9$. Такимъ же образомъ получатся и всѣ числа между 20 и 13, за исключеніемъ числа 16, котораго здѣсь никоимъ образомъ нельзя получить.

Возьмемъ другой примѣръ, когда $a = 16$, $b = 12$ и $c = 7$. Здѣсь подъ буквой B мы встрѣчаемъ, помимо чиселъ 0 и 12, только числа 7, 2, 9, 4 и 11, подъ буквой A, помимо 0 и 16, числа $16 - 7 = 9$, $16 - 2 = 14$, $16 - 9 = 7$, $16 - 4 = 12$ и $16 - 11 = 5$, а также числа $16 - 7 - 7 = 2$, $16 - 7 - 2 = 7$, $16 - 7 - 9 = 0$ и $16 - 7 - 4 = 5$. Подъ буквой C

мы, кромѣ 0 и 7, встрѣтимъ лишь числа $2 . 7 - 12 = 2$, $4 . 7 - 2 . 12 = 4$, и такимъ образомъ оказывается невозможнымъ получить числа 1, 3, 6, 8, 10, 13 и 15.

Теперь является вопросъ, нѣтъ ли другихъ методовъ переливанія, которые приводятъ и къ такимъ числамъ, какихъ нельзя получить, слѣдуя предыдущему методу.

Ближайшее изслѣдованіе показываетъ, что дѣйствительно существуетъ еще одинъ методъ, но онъ даетъ лишь тѣ же результаты, къ которымъ приводитъ первый методъ; въ частности оказывается, что достижимыя и недостижимыя числа одни и тѣ же при обоихъ методахъ, съ тою лишь разницей, что достижимыя числа здѣсь появляются въ обратномъ порядкѣ. При этомъ оказывается еще, что и во второмъ методѣ условіе возможности полученія всѣхъ чиселъ отъ 1 до a выражается такими же неравенствами

$$b + c - 1 \gtrless a \gtrless 2b + c + 1,$$

какъ и въ первомъ методѣ. Этотъ второй методъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Переливаемъ жидкость изъ сосуда A въ сосудъ B до наполненія его, затѣмъ изъ сосуда B переливаемъ жидкость въ сосудъ C до наполненія и содержимое наполненнаго сосуда C переливаемъ въ A; затѣмъ вновь наполняемъ сосудъ C изъ B, переливаемъ потомъ содержимое сосуда C въ A, и въ такомъ

порядкѣ мы повторяемъ переливанія до тѣхъ поръ, пока содержимаго сосуда B уже будетъ недостаточно для совершеннаго наполненія сосуда C. Тогда мы все-таки переливаемъ этотъ остатокъ изъ сосуда B въ C, такъ что сосудъ B опорожнится. Затѣмъ мы вновь наполняемъ до краевъ сосудъ B жидкостью изъ A и повторяемъ только-что описанный процессъ, пока количество жидкости, оставшееся въ сосудѣ B, опять станетъ меньше, чѣмъ можетъ вмѣщать сосудъ C. Тогда мы снова переливаемъ этотъ остатокъ въ C, опорожненный сосудъ B наполняемъ жидкостью изъ A и наливаемъ полностью сосудъ C жидкостью изъ B и т. д. Поясникъ это слѣдующимъ примѣромъ:

http://mathesis.ru

A	B	C
(16)	(11)	(6)
16	0	0
5	11	0
5	5	6
11	5	0
11	0	5
0	11	5

0	10	6
6	10	0
6	4	6
12	4	0
12	0	4
1	11	4
1	9	6

7	9	0
7	3	6
13	3	0
13	0	3
2	11	3
2	8	6
8	8	0

8	2	6
14	2	0
14	0	2
3	11	2
3	7	6
9	7	0
9	1	6

15	1	0
15	0	1
4	11	1
4	6	6
10	6	0
10	0	6
16	0	0

http://mathesis.ru

Мы замѣчаемъ, что въ томъ случаѣ, когда число a удовлетворяетъ условному неравенству, группы трехъ получающихся чиселъ слѣдуютъ другъ за другомъ въ порядкѣ, какъ разъ обратномъ тому, какой имѣетъ мѣсто при первомъ методѣ. Если же указанное условное неравенство не выполняется, то мы встрѣтимся съ тѣмъ случаемъ, когда въ сосудѣ A будетъ недостаточно жидкости для совершеннаго наполненія сосуда B. Въ этомъ случаѣ мы должны наполнить, насколько возможно, сосудъ B и продолжать переливаніе согласно нашему методу. Въ результатѣ, однако, окажется, что нѣкоторыхъ чиселъ невозможно будетъ получить: это тѣ же самыя числа, какія должны были выпасть и при первомъ методѣ. Чтобы пояснить это, разработаемъ одинъ и тотъ же примѣръ при помощи обоихъ методовъ. Пусть будетъ $a = 16$, $b = 12$, $c = 7$.

Первый методъ.

A	B	C
(16)	(12)	(7)
16	0	0
9	0	7
9	7	0
2	7	7
2	12	2
14	0	2
14	2	0

7	2	7
7	9	0
0	9	7
0	12	4
12	0	4
12	4	0
5	4	7
5	11	0

Второй методъ.

A	B	C
(16)	(12)	(7)
16	0	0
4	12	0
4	5	7
11	5	0
11	0	5
0	11	5
0	9	7

7	9	0
7	2	7
14	2	0
14	0	2
2	12	2
2	7	7
9	7	0
9	0	7
16	0	0

http://mathesis.ru

Мы видимъ, что при примѣненіи того и другого метода выпадаютъ числа: 1, 3, 6, 8, 10, 13 и 15; всѣ же прочія числа отъ 1 до 16 получаются.

---

http://mathesis.ru

§ 7.

Повѣрка при помощи девятки и фокусы съ девяткой.

При дѣленіи всякаго числа на 9 получается такой же остатокъ, какъ и при дѣленіи на 9 суммы цифръ этого числа. Это происходитъ отъ того, что основаніе десять нашей системы счисленія, а, слѣдовательно, и степени его — какъ-то: сто, тысяча и т. д. — при дѣленіи на девять даютъ въ остаткѣ 1. Дѣйствительно, если число содержитъ a единицъ, b десятковъ, c сотенъ, d тысячъ и т. д., то его можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$a + 10\,b + 100\,c + 1000\,d + \cdots,$$

и эту сумму можно представить въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ, изъ конхъ одно есть

$$a + b + c + d + \ldots,$$

т. е. сумма цифръ даннаго числа, а другое равно $9\,b + 99\,c + 999\,d + \ldots$, и, слѣдовательно, дѣлится на девять безъ остатка. Такъ какъ это второе слагаемое при дѣленіи на девять не даетъ остатка, то остатокъ, который получается при дѣленіи на 9 числа $a + 10\,b + 100\,c + 1000\,d + \ldots$, долженъ быть равенъ остатку, который получится при дѣленіи на

девять суммы $a + b + c + d + \ldots$. Пользуясь этимъ правиломъ, мы можемъ очень быстро находить остатокъ отъ дѣленія на девять даже многозначныхъ чиселъ. Нужно лишь складывать подрядъ цифры, и всякій разъ, когда мы при этомъ сложеніи будемъ получать двузначную сумму, нужно опять брать сумму ея цифръ. Слѣдующій примѣръ пояснитъ намъ сказанное.

Предположимъ, что нужно опредѣлить остатокъ отъ дѣленія на девять числа 74056892. Мы вычисляемъ его слѣдующимъ образомъ: $7 + 4 = 11$, т. е. $1 + 1 = 2$; $2 + 0 = 2$; $2 + 5 = 7$; $7 + 6 = 13$, т. е. $1 + 3 = 4$; $4 + 8 = 12$, т. е. $1 + 2 = 3$; $3 + 2 = 5$. Цифру 9 мы въ этомъ сложеніи могли пропустить. Такимъ образомъ, искомый остатокъ равенъ 5. При нѣкоторомъ навыкѣ можно такимъ путемъ найти остатокъ отъ дѣленія какого-нибудь числа на девять гораздо скорѣе, чѣмъ путемъ дѣйствительнаго дѣленія числа на девять.

На опредѣленіи остатка отъ дѣленія на девять основана такъ называемая повѣрка при помощи девятки. Въ прежніе вѣка эта повѣрка постоянно примѣнялась къ первымъ четыремъ дѣйствіямъ; теперь она совершенно забыта, такъ какъ учителя народныхъ школъ не научаются ей въ своихъ семинаріяхъ, что очень достойно сожалѣнія въ виду тѣхъ выгодныхъ сторонъ, которыми отличается эта повѣрка. Она заключается въ томъ,

что вычисленія производятся не только съ заданными числами, но попутно также и съ остатками отъ дѣленія ихъ на девять. Тогда результатъ, полученный отъ производства дѣйствій надъ самими числами, и результатъ тѣхъ же дѣйствій, совершенныхъ надъ соотвѣтственными остатками, должны при дѣленіи на девять давать одинъ и тотъ же остатокъ. Въ случаѣ разногласія заключаемъ, что въ вычисленіи сдѣлана ошибка. Правильность этой повѣрки при помощи девятки доказывается слѣдующимъ образомъ. Если число n при дѣленіи на девять даетъ остатокъ r, то мы можемъ положить

$$n = 9a + r.$$

Если второе число n' даетъ при дѣленіи на девять остатокъ r', то имѣемъ еще:

$$n' = 9a' + r'.$$

Но почленное сложеніе, вычитаніе и умноженіе обоихъ равенствъ всегда даетъ въ правой части сумму, первое слагаемое которой дѣлится безъ остатка на 9 и второе слагаемое которой соотвѣтственно равно одному изъ чиселъ $r + r'$, $r - r'$ и $r.r'$. Этимъ мы доказали правильность повѣрки съ помощью девятки первыхъ трехъ основныхъ дѣйствій. Какъ слѣдуетъ дѣлать эту повѣрку при дѣленіи, покажетъ слѣдующій примѣръ. Предположимъ, что нужно раздѣлить 1048576 на 8192. Мы получимъ 128 и желаемъ подтвердить этотъ результатъ по-

вѣркой съ помощью девятки. При дѣленіи на 9 число 1048576 даетъ въ остаткѣ 4, число 8192—остатокъ 2; 4 : 2 = 2; слѣдовательно, остатокъ отъ дѣленія 128 на 9 долженъ быть 2; такъ и есть въ дѣйствительности. При этомъ можетъ случиться, что остатки не будутъ дѣлиться другъ на друга. Тогда къ дѣлимому слѣдуетъ прибавлять 9 столько разъ, сколько нужно для того, чтобы получить сумму, которая дѣлится нацѣло на остатокъ, полученный при дѣленіи дѣлителя на 9. Пусть, напримѣръ, дѣлимое равно 1872134, а дѣлитель пусть будетъ 473. Соотвѣтственные остатки отъ дѣленія на 9 равны 8 и 5. Такъ какъ 8 не дѣлится на 5, то будемъ прибавлять къ 8 число 9 столько разъ, сколько нужно для полученія числа, которое дѣлится на 5. Мы находимъ послѣдовательно числа 17, 26, 35. Число 35 дѣлится на 5. Частное равно 7. Слѣдовательно, частное отъ дѣленія 1872134 на 473 должно при дѣленіи на 9 давать въ остаткѣ 7. Такъ какъ это частное равно 3958, а остатокъ отъ дѣленія этого числа на 9 равенъ 7, то повѣрка девяткой подтверждаетъ правильность дѣленія. Эта повѣрка оказывается особенно полезной при умноженіи многозначныхъ чиселъ.

На пользованіи остатками отъ дѣленія на 9 основано нѣсколько фокусовъ, изъ которыхъ наиболѣе поразительный состоитъ въ слѣдующемъ. Мы предлагаемъ кому-нибудь написать какое-угодно многозначное число. Подъ этимъ числомъ мы про-

симъ подписать число, состоящее изъ тѣхъ же самыхъ цифръ, но написанныхъ въ другомъ какомъ-нибудь совершенно произвольномъ порядкѣ. Затѣмъ мы просимъ вычесть меньшее число изъ бо́льшаго и въ полученной разности зачеркнуть совершенно произвольную цифру, лишь бы не равную нулю *). Мы просимъ написать вторично полученное послѣ вычеркиванія многозначное число и показать намъ его. Тогда, не имѣя никакого понятія о первоначально написанномъ числѣ, мы можемъ съ помощью послѣдняго числа опредѣлить, какая цифра была вычеркнута. Когда намъ покажутъ число, нужно лишь найти остатокъ отъ дѣленія его на 9 и вычесть этотъ остатокъ изъ 9. Въ результатѣ мы непремѣнно получимъ вычеркнутую цифру. Предположимъ, напримѣръ, что первоначально было написано число

4735892006.

Подъ нимъ написали, положимъ, число

2004589673.

Разность этихъ двухъ чиселъ равна

2731302333.

---

*) При желаніи мы можемъ предложить сперва помножить полученную разность на совершенно произвольное число и затѣмъ въ полученномъ произведеніи вычеркнуть произвольную цифру.

http://mathesis.ru

Предположимъ далѣе, что вычеркнутая цифра была 1. Тогда показанное число будетъ слѣдующее:

273302333.

Остатокъ отъ дѣленія его на 9 равенъ 8. Такимъ образомъ, вычеркнутая цифра есть $9 - 8 = 1$. Чтобы понять, почему это такъ, мы должны принять во вниманіе, что уменьшаемое и вычитаемое въ процессѣ вычитанія состоятъ изъ одинаковыхъ цифръ и, стало быть, имѣютъ одинаковую сумму цифръ; поэтому при дѣленіи на девять они даютъ одинъ и тотъ же остатокъ. Разность, слѣдовательно, есть число, кратное девяти; поэтому сумма вычеркнутой цифры и остатка отъ дѣленія на 9 числа, полученнаго послѣ вычеркиванія, должна быть равна 9. Чтобы найти вычеркнутую цифру, нужно, слѣдовательно, вычесть изъ девяти остатокъ отъ дѣленія на 9 показаннаго числа.

http://mathesis.ru

§ 8.

Фокусы съ костями.

Задача объ угадываніи чиселъ, выпавшихъ на игральныхъ костяхъ, относится къ группѣ тѣхъ задачъ, которыя мы разобрали въ § 1, если только при рѣшеніи ея мы принимаемъ во вниманіе исключительно ариѳметическія дѣйствія, а не особенное свойство игральной кости. Кости въ томъ видѣ, какой придаютъ имъ уже въ теченіе нѣсколькихъ столѣтій, имѣютъ шесть граней; на нихъ нанесены шесть чиселъ, отъ 1 до 6, представленныхъ соотвѣтствующимъ числомъ точекъ, но непремѣнно такимъ образомъ, что два числа, составляющихъ въ суммѣ 7, находятся на двухъ противоположныхъ, т. е. параллельныхъ другъ другу, граняхъ кости. Такимъ образомъ, если въ какой-нибудь кости число a находится сверху, то, перевернувъ кость, мы увидимъ сверху число 7 — a. На этомъ особенномъ свойствѣ костей основано множество фокусовъ; мы остановимся лишь на двухъ изъ нихъ, отличающихся различной природой.

1. Чтобы угадать, какія два числа выпали на двухъ брошенныхъ костяхъ, мы просимъ перевер-

нуть первую кость и сообщить намъ, какая тогда получается сумма очковъ. Затѣмъ мы просимъ перевернуть и вторую кость, и опять сообщить намъ полученную затѣмъ сумму очковъ. Оба сообщенныхъ намъ числа мы складываемъ, вычитываемъ сумму изъ 21 и дѣлимъ остатокъ пополамъ. Тогда мы получимъ первое изъ двухъ чиселъ, которыя мы должны были угадать. Далѣе, мы прибавляемъ 7 къ первому названному намъ числу и изъ полученной суммы вычитываемъ второе названное намъ число. Половина остатка представитъ намъ второе изъ двухъ чиселъ, которыя мы должны были угадать [8]). Напримѣръ, предположимъ, что кости упали такъ:

Когда первая кость будетъ перевернута, то сумма очковъ окажется $2+4=6$. Когда затѣмъ перевернуть вторую кость, то сумма очковъ будетъ $2+3=5$. Сообщенныя намъ числа 6 и 5 мы складываемъ и въ суммѣ получаемъ 11; $21-11=10$; половина десяти равна 5, т. е. числу очковъ, выпавшихъ на первой кости. Далѣе, $6+7=13$; $13-5=8$; половина восьми, т. е. 4, представитъ намъ число очковъ, выпавшихъ на второй кости.

2. Чтобы отгадать числа очковъ, выпавшихъ одновременно на трехъ брошенныхъ костяхъ, мы

просимъ поставить три кости рядомъ другъ съ другомъ, а за ними въ одну съ ними линію еще три кости, которыя показывали бы такія же числа очковъ и въ такомъ же порядкѣ, какъ и первыя три. Затѣмъ мы предлагаемъ перевернуть приставленныя три кости, такъ что изъ чиселъ на 6 костяхъ составится шестизначное число. Мы просимъ раздѣлить это шестизначное число на 37, а затѣмъ полученное частное вновь раздѣлить на 3. Эти дѣленія должны совершаться нацѣло. Въ результатѣ дѣленія на 3 получится четырехзначное число, которое мы просимъ сообщить намъ. Мы вычитываемъ изъ него 7 и дѣлимъ остатокъ на 9. Въ частномъ получится трехзначное число: три цифры его представятъ намъ три выпавшія числа очковъ, которыя мы взялись угадать. Допустимъ, что брошенныя кости вскрылись слѣдующимъ образомъ:

Послѣ того, какъ вы поставите еще три кости, которыя показываютъ такія же числа очковъ, и эти кости перевернете, вы получите слѣдующую картину

На этихъ шести костяхъ представлено число 263514. Дѣленіе послѣдняго на 37 даетъ въ част-

номъ 7122; это число при дѣленіи на 3 даетъ въ частномъ 2374. Это послѣднее число вы сообщаете лицу, желающему отгадать выпавшія числа очковъ. Отгадывающій долженъ вычесть изъ названнаго числа 7 и полученное число раздѣлить на 9. Такимъ образомъ онъ получитъ сперва 2367, а затѣмъ 263, и выпавшія числа очковъ равны соотвѣтственно 2, 6 и 3. Изъ послѣдующаго ясно, почему этотъ способъ всегда приводитъ къ цѣли. Обозначимъ трехзначное число, представленное тремя выпавшими группами очковъ, буквой a; тогда за нимъ будетъ стоять число 777 — a, и такимъ образомъ получится шестизначное число

$$1000\,a + (777 - a).$$

Но послѣднее число равно $999\,a + 777$. Частное отъ дѣленія этого числа на 37 равно

$$27\,a + 21.$$

Поэтому дѣленіе на 3 даетъ число $9\,a + 7$; послѣднее сообщается отгадывающему. Вычитая изъ названнаго числа 7, онъ получитъ 9a; дѣленіе этого числа на 9 даетъ искомое число a.

http://mathesis.ru

§ 9.

Цѣпи домино.

На каждомъ камнѣ игры въ домино изображены два числа при помощи точекъ, т. е. натуральнымъ способомъ начертанія, при чемъ принято во вниманіе и число нуль, которое отмѣчается пустымъ мѣстомъ. Такимъ образомъ, въ правильномъ домино имѣются всевозможныя парныя соединенія чиселъ отъ 0 до n; среди этихъ соединеній должны быть также $n+1$ паръ двухъ равныхъ чиселъ: послѣднія пары называются дублетами. Поэтому полное домино должно содержать $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ камней. Теорія соединеній даетъ также формулу суммы всѣхъ очковъ на всѣхъ камняхъ домино: она равна $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$ *). Въ играхъ, которыя встрѣчаются въ продажѣ, n равно одному какому-нибудь изъ слѣдующихъ чиселъ: 6, 7, 8 и 9. Такъ какъ каждый камень домино представляетъ опредѣленное число, выраженное суммой находящихся на немъ очковъ,

*) Дѣйствительно, каждое число встрѣчается дважды на дублетѣ и, кромѣ того, еще n разъ, т. е. всего $(n+2)$ раза. Далѣе, сумма всѣхъ чиселъ отъ 0 до n включительно равна $\frac{1}{2}n(n+1)$. Слѣдовательно, искомая сумма очковъ равна $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$.

http://rutracker.org

то изъ этихъ камней можно поэтому составлять магическіе квадраты (ср. соотвѣтственный отдѣлъ этой книги). О подобныхъ соединеніяхъ камней домино мы здѣсь не будемъ говорить, такъ какъ они не имѣютъ никакого отношенія къ сущности самой игры въ домино. Столь же мало общаго имѣютъ съ характеромъ этой игры и тѣ фокусы, которые можно продѣлать согласно указаніямъ § 5, замѣнивши въ немъ карты камнями домино. Главное правило игры въ домино заключается въ составленіи цѣпи изъ камней непремѣнно такимъ образомъ, чтобы на приложенныхъ другъ къ другу концахъ камней были изображены одинаковыя числа. Если числа на камняхъ изображены не съ помощью точекъ, но, какъ мы здѣсь будемъ дѣлать, посредствомъ обыкновенныхъ цифръ, то такая цѣпь имѣетъ примѣрно слѣдующій видъ:

http://mathelis.ru

Если такая цѣпь домино оканчивается тѣмъ же числомъ, которымъ она начинается, такъ что ее можно расположить въ формѣ сомкнутой линіи, то цѣпь называется замкнутой. Такъ какъ всякая цѣпь состоитъ изъ паръ равныхъ другъ другу смежныхъ чиселъ, то, за исключеніемъ начальнаго и конечнаго чиселъ, всякое число повторяется здѣсь четное число разъ; въ замкнутой же цѣпи всякое число повторяется четное число разъ. Поэтому посредствомъ домино, камни котораго содержатъ пары чиселъ отъ 0 до n, можно составить замкнутую цѣпь изъ всѣхъ камней въ томъ случаѣ, когда каждое число встрѣчается четное число разъ, т. е. когда $n+2$ есть четное число [9]); слѣдовательно, n должно быть четнымъ числомъ, напримѣръ, 6 или 8. Если же n, а, слѣдовательно, и $n+2$, есть нечетное число, то изъ всѣхъ камней можно составить $\frac{1}{2}(n+1)$ незамкнутыхъ цѣпей, при чемъ и отдѣльно взятый камень, если онъ не дублетъ, нужно разсматривать, какъ незамкнутую цѣпь. При этомъ можно устроить такъ, чтобы всѣ цѣпи, за исключеніемъ одной, состояли каждая изъ одного лишь камня. Поэтому изъ всѣхъ камней можно получить одну незамкнутую цѣпь и $\frac{1}{2}(n+1)-1$, т. е. $\frac{1}{2}(n-1)$ отдѣльныхъ камней. Итакъ, когда n есть нечетное число, то наибольшее число камней въ незамкнутой цѣпи равно разности между числомъ всѣхъ камней $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ и числомъ $\frac{1}{2}(n-1)$, т. е. оно равно $\frac{1}{2}(n^2+2n+3)$.

Если же n есть число четное, то изъ всѣхъ камней можно получить одну цѣпь. Въ замкнутой цѣпи, содержащей всѣ камни, за исключеніемъ $n+1$ дублетовъ, каждый дублетъ можетъ быть помѣщенъ въ $\frac{1}{2}n$ мѣстахъ. Поэтому число всѣхъ возможныхъ цѣпей, содержащихъ каждая всѣ $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ камней, въ $(\frac{1}{2}n)^{n+1}$ разъ превышаетъ число всѣхъ замкнутыхъ цѣпей, которыя можно составить изъ $\frac{1}{2}n(n+1)$ камней, среди которыхъ нѣтъ дублетовъ. Г. Люка́ (Lucas) въ своей книгѣ „Récréations“ приводитъ величину послѣдняго числа, когда n равно 4: оно равно 63360; въ случаѣ же $n=6$ это число, по вычисленію г. Рейса (Reiss) изъ Франкфурта-на-Майнѣ, равно 129 милліонамъ и 976320 (въ Anali di Matematica pura ed applicata 1871).

То обстоятельство, что при четномъ n можно изъ всѣхъ $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ камней составить одну замкнутую цѣпь, даетъ поводъ къ одному поразительному обману: если мы незамѣтно удалимъ изъ домино одинъ камень, не принадлежащій къ числу дублетовъ, то всѣ прочіе камни, какъ бы мы ихъ ни располагали по правилу игры, всегда должны составлять одну незамкнутую цѣпь, въ которой конечнымъ и начальнымъ числомъ являются числа, изображенныя на тайно удаленномъ камнѣ. Такимъ образомъ, мы въ состояніи напередъ сказать тому, кто составляетъ цѣпь, что, если онъ начнетъ числомъ a, то, какъ бы онъ ни располагалъ камни,

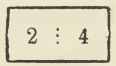
онъ непремѣнно кончитъ числомъ b, при чемъ a и b — числа тайкомъ удаленнаго камня. Этотъ фокусъ можно обставить еще и слѣдующимъ образомъ: мы предлагаемъ тому, кто собирается составить цѣпь, сказать намъ, какими числами онъ желалъ бы начать и кончить цѣпь и сколько камней онъ желалъ бы употребить. Тогда мы удаляемъ такіе камни, изъ которыхъ можно было бы составить незамкнутую цѣпь, имѣющую въ своемъ началѣ и концѣ тѣ же числа, какія нашъ партнеръ желаетъ имѣть въ началѣ и концѣ своей цѣпи. Предположимъ, напримѣръ, что въ данномъ домино $n = 6$ и число всѣхъ камней равно, слѣдовательно, 28; если желательно составить изъ 23 камней цѣпь, которая начинается съ 4, а кончается числомъ 5, то мы должны убрать 5 камней, образующихъ цѣпь съ числами 4 и 5 на концахъ,—напримѣръ, слѣдующіе камни:

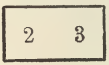
Когда мы удалимъ эти 5 камней, то изъ прочихъ 23 камней можно будетъ различнымъ образомъ сложить одну единственную цѣпь, и на концахъ ея всегда будутъ числа 4 и 5.

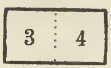
Если же n есть число нечетное, то мы должны незамѣтно убрать по крайней мѣрѣ $\frac{1}{2}(n-1)$ камней для того, чтобы изъ прочихъ камней можно было составить цѣпь съ предписанными числами на концахъ; при

http://rcin.org.pl

этомъ тѣ $\frac{1}{2}(n-1)$ камней, которые нужно удалить, должны содержать всѣ числа отъ 0 до n за исключеніемъ тѣхъ двухъ чиселъ, которыя намѣчены для начала и конца цѣпи. Если, напримѣръ, домино состоитъ изъ 55 камней (случай, когда $n = 9$), и намъ предлагаютъ составить цѣпь, которая начинается числомъ 3 и кончается числомъ 7, то мы должны удалить, напримѣръ, слѣдующіе камни:

Понятно, что мы можемъ убрать и бо́льшее число камней; напримѣръ, результатъ будетъ одинъ и тотъ же, уберемъ ли мы одинъ камень 

, или же уберемъ вмѣсто одного этого оба слѣдующіе: 

и 

.

http://mathesis.ru

§ 10.

Представленіе всѣхъ чиселъ въ видѣ суммъ степеней числа 2.

Только благодаря тому обстоятельству, что рука наша имѣетъ пять пальцевъ, число д е с я т ь, т. е. число пальцевъ на обѣихъ рукахъ, у всѣхъ почти народовъ легло въ основаніе системы какъ словесныхъ, такъ и письменныхъ числовыхъ знаковъ. Однако, аналогично нашей нумераціи, въ которой значеніе цифры зависитъ отъ ея мѣста, можно построить систему счисленія при какомъ угодно другомъ основаніи, понятно, не равномъ единицѣ. Итакъ, наименьшее число, которое можетъ служить основаніемъ, равно двумъ. Подобно тому, какъ въ десятичной системѣ мы, кромѣ 0, имѣемъ еще девять цифръ, такъ и въ двоичной системѣ мы, кромѣ 0, имѣемъ еще одну лишь цифру, а именно 1; смотря по тому, занимаетъ ли эта 1 первое мѣсто справа, или второе, или третье мѣсто и т. д., она должна считаться за 1, за 2^1, за 2^2 и т. д. Поэтому въ двоичной системѣ каждое число представляется въ видѣ суммы степеней числа два. Такъ, напримѣръ, $111 = 1 + 2^1 + 2^2 = 7$; далѣе,

$$1010011 = 1 + 2^1 + 2^4 + 2^6$$
$$= 1 + 2 + 16 + 64 = 83.$$

http://mccme.ru

$$1110100 = 2^2 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$
$$= 4 + 16 + 32 + 64 = 116.$$

Обратно, если мы желаемъ представить по двоичной системѣ число, написанное по десятичной, то мы вычитываемъ изъ него наибольшую степень числа 2, какую только можно вычесть изъ него, такимъ же образомъ поступаемъ съ полученнымъ остаткомъ и продолжаемъ такъ до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до остатка 0 или 1. Каждая степень двухъ, которую можно вычесть, изображается черезъ 1, а на мѣсто всякой недостающей степени пишется 0. Напримѣръ, если мы желаемъ изобразить по двоичной системѣ 1897 г., то прежде всего мы должны замѣтить, что высшая степень числа 2, какая содержится въ 1897, равна $2^{10} = 1024$. Остатокъ $1897 - 1024 = 873$ содержитъ $2^9 = 512$; остатокъ $873 - 512 = 361$ содержитъ $2^8 = 256$. Остатокъ $361 - 256 = 105$ не содержитъ степени 2^7, но содержитъ $2^6 = 64$. Остатокъ $105 - 64 = 41$ заключаетъ въ себѣ степень $2^5 = 32$ Въ остаткѣ $41 - 32 = 9$ не содержится степени 2^4, но въ немъ, конечно, заключается степень $2^3 = 8$. Остатокъ $9 - 8 = 1$, такъ что мы не находимъ здѣсь второй и первой степеней числа 2. Поэтому

$$1897 = 11101101001.$$

На изображеніи чиселъ посредствомъ степеней числа два основано множество фокусовъ; нѣкоторымъ нихъ мы дадимъ здѣсь мѣсто.

http://rutheses.ru

1. Приготовьте себѣ 7 карточекъ; на одной напишите всѣ тѣ числа, которыя въ двоичной системѣ оканчиваются на 1, т. е. всѣ нечетныя числа. На другой напишите всѣ числа, предпослѣдняя цифра которыхъ въ двоичной системѣ есть 1, т. е. 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15 и т. д. На третьей карточкѣ слѣдуетъ написать тѣ числа, въ которыхъ третья справа цифра при изображеніи ихъ въ двоичной системѣ есть 1, т. е. числа 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15 и т. д. На седьмой карточкѣ будутъ числа отъ 64 до 127 включительно [10]). Вы предлагаете кому-нибудь задумать число не выше 127, даете ему одну за другой семь карточекъ и просите сообщить вамъ, есть ли задуманное число на данной карточкѣ, или нѣтъ. Сложивъ первыя числа тѣхъ карточекъ, на которыхъ имѣется задуманное число, вы въ суммѣ получите задуманное число. Напримѣръ, если задумано было число 77, то вамъ скажутъ, что оно находится на первой, третьей, четвертой и седьмой карточкахъ; сложивъ, вы получите

$$1 + 4 + 8 + 64 = 77.$$

Вмѣсто чиселъ можно взять также имена, названія городовъ и тому подобное, если только установить какимъ-либо образомъ соотвѣтствіе между ними и числами, — напримѣръ, при помощи произвольнымъ образомъ составленной таблицы. Понятно, что вмѣсто семи карточекъ можно взять боль-

http://mathesis.ru

ше или меньше. При помощи n карточекъ можно отгадать $2^n - 1$ чиселъ или именъ.

2. На столѣ лежитъ нѣсколько однородныхъ предметовъ,—напримѣръ, игральныя марки. Лицо А желаетъ отгадать число ихъ; съ этой цѣлью онъ проситъ В, чтобы этотъ сталъ отбирать марки одну за другой — одну правой рукой, другую лѣвой; взятую правой рукой слѣдуетъ опустить въ кружку, а взятую лѣвой рукой — положить на первую изъ тарелокъ, которыя должны быть разставлены на столѣ по прямой линіи. Если при этомъ останется одна лишняя марка, то ее слѣдуетъ положить на столъ повыше первой тарелки. Затѣмъ нужно такимъ же образомъ поступить и съ марками, лежащими на первой тарелкѣ: взятыя правой рукой опускать въ кружку, взятыя же лѣвой рукой класть на вторую тарелку; если при этомъ останется одна марка, то ее слѣдуетъ помѣстить на столъ повыше второй тарелки. Если В будетъ поступать такимъ образомъ, то, наконецъ, въ кружку будутъ опущены всѣ марки, за исключеніемъ тѣхъ немногихъ, которыя будутъ лежать на столѣ возлѣ той или другой тарелки. Въ концѣ концовъ, долженъ наступить моментъ, когда на одной тарелкѣ будетъ находиться одна единственная марка; эту послѣднюю нужно положить возлѣ этой тарелки. Когда А подойдетъ къ столу, онъ можетъ отгадать число марокъ, которыя лежали первоначально на столѣ. Для каждой тарелки, подлѣ

которой лежитъ марка, онъ долженъ лишь взять степень числа 2 — именно: (n — 1)-ую степень для n-ой тарелки—и всѣ эти степени сложить. Предположимъ, что А нашелъ такую картину:

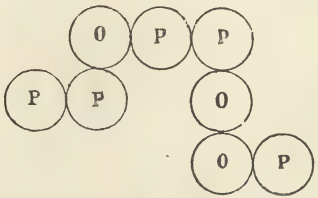
Тогда онъ сосчитываетъ

$$1 + 4 + 8 + 32 = 45.$$

Итакъ, на столѣ первоначально было 45 марокъ.

3. Еще болѣе поразительнымъ представляется примѣненіе къ слѣдующему фокусу того свойства каждаго числа, что оно есть сумма степеней числа 2. А и В уславливаются между собой въ томъ, чтобы двѣ стороны монеты соотвѣтственно означали цифры 0 и 1 числа, написаннаго по двоичной системѣ: напримѣръ, рѣшетка будетъ 1, а орелъ—0. А выходитъ, а В сговаривается съ остающимися, какое число долженъ отгадать А. В отводитъ присутствующимъ глаза, увѣряя ихъ, напримѣръ, будто А въ состояніи отгадать любое число по угламъ, которые образуютъ другъ съ другомъ монеты. Затѣмъ В беретъ какія-нибудь монеты и при ихъ помощи представляетъ выбранное число по двоичной системѣ, принимая за 1 монету, лежащую рѣшеткой вверхъ, и за нуль такую монету, которая лежитъ вверхъ орломъ. Чтобы ввести присутствующихъ въ заблужденіе и не навести ихъ на мысль, что въ фокусѣ

существенную роль играетъ то обстоятельство, какой стороной монета обращена кверху, В будетъ составлять изъ монетъ фигуры, дѣлая видъ, что онъ очень старается строить углы возможно точнѣе. Предположимъ, что общество остановилось на числѣ 217. Тогда В составитъ изъ монетъ примѣрно такую фигуру:



Каждый кружокъ изображаетъ здѣсь монету, а буквы Р и О указываютъ, какой стороной обращена монета вверхъ: рѣшеткой или орломъ.

Подойдя къ столу, А разсматриваетъ лежащія монеты справа налѣво, и такимъ образомъ заключаетъ, что задуманное число равно

$$1 + 8 + 16 + 64 + 128 = 217.$$

---

http://mathesis.ru

§ 11.

Задача Баше о гиряхъ.

Уже въ книгѣ Баше „Problèmes plaisants et délectables“ мы находимъ слѣдующую задачу: какія надо имѣть гири, чтобы можно было посредствомъ нихъ отвѣсить на вѣсахъ любое цѣлое число фунтовъ отъ 1 до 40, при чемъ важно, чтобы число такихъ гирь было возможно меньшимъ. Если намъ позволяютъ класть гири только на одну чашку вѣсовъ, то оказывается, что числа, выражающія, сколько фунтовъ должна вѣсить каждая гиря, должны быть послѣдовательными степенями числа два: дѣйствительно, какъ мы видѣли въ § 10, каждое цѣлое число можно представить, какъ сумму степеней числа два. Если же мы имѣемъ право класть гири на обѣ чашки вѣсовъ, т. е. если можно вычитывать гири, то числа, указывающія, сколько должны вѣсить гири, должны быть степенями числа три. Итакъ, чтобы быть въ состоянія взвѣсить всякое цѣлое число фунтовъ до 40, мы должны имѣть четыре гири, которыя вѣсятъ

1, 3, 9 и 27

фунтовъ Дѣйствительно, какъ показываетъ слѣдующая таблица, мы можемъ путемъ сложенія и вычи-

http://mathesis.ru

танія однихъ лишь этихъ четырехъ чиселъ или только нѣкоторыхъ изъ нихъ, получить любое число до 40:

$1 = 1$	$9 = 9$	$17 = 27 - 9 - 1$
$2 = 3 - 1$	$10 = 9 + 1$	$18 = 27 - 9$
$3 = 3$	$11 = 9 + 3 - 1$	$19 = 27 - 9 + 1$
$4 = 3 + 1$	$12 = 9 + 3$	$20 = 27 - 9 + 3 - 1$
$5 = 9 - 3 - 1$	$13 = 9 + 3 + 1$	$21 = 27 - 9 + 3$
$6 = 9 - 3$	$14 = 27 - 9 - 3 - 1$	$22 = 27 - 9 + 3 + 1$
$7 = 9 - 3 + 1$	$15 = 27 - 9 - 3$	$23 = 27 - 3 - 1$
$8 = 9 - 1$	$16 = 27 - 9 - 3 + 1$	$24 = 27 - 3$

$25 = 27 - 3 + 1$	$33 = 27 + 9 - 3$
$26 = 27 - 1$	$34 = 27 + 9 - 3 + 1$
$27 = 27$	$35 = 27 + 9 - 1$
$28 = 27 + 1$	$36 = 27 + 9$
$29 = 27 + 3 - 1$	$37 = 27 + 9 + 1$
$30 = 27 + 3$	$38 = 27 + 9 + 3 - 1$
$31 = 27 + 3 + 1$	$39 = 27 + 9 + 3$
$32 = 27 + 9 - 3 - 1$	$40 = 27 + 9 + 3 + 1$

Легко видѣть, что посредствомъ меньшаго числа гирь невозможно будетъ представить всѣ числа до 40, и что вообще, складывая или вычитывая степени числа 3:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81, \ldots\ 3^n,$$

мы можемъ получить всѣ числа отъ 1 до $\frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$[11]).

Со времени своего перваго появленія (1612 г.) задача Баше о гиряхъ много разъ приводилась въ очень многихъ книгахъ и журналахъ вплоть до нашихъ дней. Но лишь недавно майоръ Макмагонъ

http://rutracker.ru

(Macmahon) въ своей статьѣ „Certain special partitions of numbers“ (Quarterly Journal of Mathematics, 1886) далъ математически разработанное обобщеніе этой задачи. Онъ разбираетъ болѣе общую задачу: какимъ образомъ можно вообще взвѣсить всѣ грузы отъ 1 фунта до n фунтовъ, если предположить, что разновѣски имѣютъ одинаковые или неодинаковые вѣса. Изъ выведенныхъ имъ формулъ слѣдуетъ, что, напримѣръ, при $n = 40$ можно восьмью способами взвѣсить любое цѣлое число фунтовъ отъ 1 до 40 при условіи, чтобы позволено было пользоваться лишь гирями въ 1, 3, 9 и 27 фунтовъ, и чтобы каждый грузъ можно было взвѣсить лишь по суммѣ гирь, а не по ихъ разности. Эти 8 возможныхъ способовъ суть слѣдующіе:

1) 40 гирь по одному фунту.

2) 1 гиря въ 1 фунтъ и 13 гирь по 3 фунта.

3) 4 гири по 1 фунту и 4 гири по 9 фунтовъ.

4) 1 гиря въ 1 фунтъ, 1 гиря въ 3 фунта и 4 гири по 9 фунтовъ.

5) 13 гирь по 1 фунту и 1 гиря въ 27 фунтовъ.

6) 1 гиря въ 1 фунтъ, 4 гири по 3 фунта и 1 гиря въ 27 фунтовъ.

7) 4 гири по 1 фунту, 1 гиря въ 9 фунтовъ и 1 въ 27 фунтовъ.

8) 1 гиря въ 1 фунтъ, 1 гиря въ 3 фунта, 1 гиря въ 9 фунтовъ и 1 гиря въ 27 фунтовъ.

http://mathesis.ru

Послѣдній способъ есть рѣшеніе задачи Б а ш е. Мы видимъ, что въ этомъ рѣшеніи число гирь является наименьшимъ; кромѣ того, это единственное рѣшеніе, въ которомъ всѣ гири имѣютъ различный вѣсъ.

http://mathesis.ru

§ 12.

Отгадываніе владѣльцевъ различныхъ вещей.

Три лица I, II и III сидятъ за столомъ, на которомъ лежатъ три небольшихъ предмета a, b и c и 24 игральныя марки. Четвертое лицо D даетъ лицу I одну марку, лицу II — двѣ и лицу III — три марки. Въ отсутствіи D каждое изъ трехъ лицъ присваиваетъ себѣ одинъ изъ трехъ предметовъ a, b и c и кладетъ его въ карманъ. D берется отгадать, какой предметъ взятъ лицомъ I, какой — лицомъ II и какой — лицомъ III, если только во время его отсутствія сдѣлано будетъ слѣдующее. Лицо, взявшее предметъ a, должно взять изъ числа оставшихся 18 марокъ столько штукъ, сколько оно получило первоначально отъ D; далѣе, лицо, взявшее предметъ b, должно взять вдвое больше марокъ, чѣмъ оно получило отъ D, и, наконецъ, лицо, взявшее предметъ c, должно взять въ четыре раза больше марокъ, чѣмъ оно получило отъ D. Тогда D можетъ по числу оставшихся на столѣ марокъ узнать, какой предметъ взяло лицо I, какой — лицо II и какой — лицо III.

Эта задача была поставлена и точно изслѣдо-

http://rcin.org.pl

вана Баше въ его книгѣ „Problèmes plaisants et délectables“ (No. XXV); съ тѣхъ поръ она воспроизводилась съ незначительными измѣненіями во многихъ книгахъ и журналахъ для занимательнаго чтенія. Три предмета a, b и c можно шестью способами распредѣлить между тремя лицами I, II и III. Дѣйствительно, если мы будемъ писать соотвѣтственно на первомъ, второмъ и третьемъ мѣстѣ ту изъ трехъ буквъ a, b и c, которая обозначаетъ предметъ, взятый лицомъ I, II и III, то мы получимъ 6 троекъ, которыя образуются посредствомъ перестановокъ изъ трехъ буквъ a, b и c. Каждому изъ шести возможныхъ способовъ распредѣленія соотвѣтствуетъ различная сумма взятыхъ марокъ, и, слѣдовательно, въ каждомъ случаѣ на столѣ также остается различное число марокъ. Это видно изъ слѣдующей таблицы:

Распредѣленіе	Число взятыхъ марокъ	Остатокъ
a b c	$1.1+2.2+3.4=17$	1
a c b	$1.1+2.4+3.2=15$	3
b a c	$1.2+2.1+3.4=16$	2
b c a	$1.2+2.4+3.1=13$	5
c a b	$1.4+2.1+3.2=12$	6
c b a	$1.4+2.2+3.1=11$	7

Уже Баше далъ стихъ-примѣту для того, чтобы можно было безъ труда удержать въ памяти связь между шестью остатками 1, 3, 2, 5, 6, 7 и шестью способами распредѣленія. Если возьмемъ

вмѣсто первыхъ трехъ буквъ три первыхъ гласныхъ звука a, e, i, то связь между остатками и способами распредѣленія можно будетъ запомнить посредствомъ слѣдующаго стиха:

Par fer, César, jadis, devint, si grand, prince.

Содержащіяся въ этомъ стихѣ слова и пары словъ относятся по порядку къ остаткамъ 1, 2, 3, 5, 6 и 7. Если мы возьмемъ соотвѣтствующее остатку слово нашего стиха или пару словъ, то два содержащихся здѣсь гласныхъ звука укажутъ намъ по порядку, какой предметъ взяло лицо I и какой взятъ лицомъ II; отсюда уже будетъ само собой понятно, какой предметъ взяло лицо III. Предположимъ, напримѣръ, что на столѣ остались 2 марки; въ этомъ случаѣ нашъ стихъ даетъ намъ слово „César“. Такъ какъ e есть второй гласный звукъ и a — первый, то лицо I взяло, слѣдовательно, второй предметъ, лицо II — первый, и потому лицо III взяло третій предметъ. Если на столѣ осталось 6 марокъ, то изъ словъ „si grand“ заключаемъ, что лицо I взяло третій предметъ, II — первый, и, слѣдовательно, лицо III взяло второй предметъ. Oughtred, книга котораго „Mathematical Recreations“ вышла въ 1653 г. въ Лондонѣ, предложилъ въ качествѣ мнемотехническаго средства вмѣсто французскаго стиха Баше слѣдующій латинскій стихъ:

Salve certa animae semita vita quies.

Еще Баше распространилъ свою задачу о трехъ лицахъ и трехъ предметахъ на случай четырехъ лицъ и четырехъ предметовъ. У Баше въ этомъ случаѣ число лежащихъ на столѣ марокъ равно 78. Лица I, II, III и IV должны соотвѣтственно производить умноженіе на 1, 2, 3 и 4, а множители, зависящіе отъ четырехъ взятыхъ вещей, суть 1, 4, 16 и 0. Здѣсь возможны 24 способа распредѣленія; зависимость ихъ отъ различнаго числа оставшихся на столѣ марокъ видна изъ слѣдующей таблицы, въ которой четыре предмета обозначены буквами a, b, c и d.

Остатки	I	II	III	IV
0	d	a	b	c
1	a	d	b	c
3	d	b	a	c
5	a	b	d	c
7	b	d	a	c
8	b	a	d	c
12	d	a	c	b
13	a	d	c	b
18	d	b	c	a
21	a	b	c	d
22	b	d	c	a
24	b	a	c	d

Остатки	I	II	III	IV
27	d	c	a	b
29	a	c	d	b
30	d	c	b	a
33	a	c	b	d
38	b	c	d	a
39	b	c	a	d
43	c	d	a	b
44	c	a	d	b
46	c	d	b	a
48	c	a	b	d
50	c	b	d	a
51	c	b	a	d

Задача о распредѣленіи четырехъ предметовъ между четырьмя лицами была разработана еще

http://mccme.ru

раньше Баше въ книгѣ Діэго Паломино (Diego Palomino), вышедшей въ 1599 г. Въ этой же книгѣ разсматриваются и магическіе квадраты.

Если вмѣсто чиселъ отъ 1 до 4, отнесенныхъ къ лицамъ, взять соотвѣтственно произвольныя числа

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

а вмѣсто чиселъ 1, 4, 16 и 0, отнесенныхъ къ четыремъ предметамъ, взять вообще числа

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n,$$

то задача Баше приведетъ насъ къ слѣдующей математической задачѣ. Если мы въ каждомъ изъ $n!$ комплексовъ, получающихся посредствомъ перестановокъ изъ элементовъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, будемъ умножать содержащіяся въ немъ величины соотвѣтственно на данныя числа $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ и будемъ складывать полученныя n произведеній, то мы получимъ $n!$ суммъ, которыя всѣ должны быть отличны другъ отъ друга. Спрашивается, какъ опредѣлить числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$? Для того случая, когда $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ означаютъ числа отъ 1 до n, г. Labosne, обработавшій четвертое изданіе книги Баше (1879 г.), указалъ методъ (ср. Note IV указанной книги), который всегда приводитъ къ рѣшенію. Въ общемъ же видѣ задача пока не разработана. Кромѣ того, г. Labosne прибавляетъ, что

въ томъ случаѣ, когда къ четыремъ лицамъ отнесены числа 1, 2, 3 и 4, числа 1, 4, 16 и 0, которыя Баше ассоціируетъ съ четырьмя предметами, можно замѣнить также числами 1, 2, 5 и 15.

http://mathesis.ru

§ 13.

Игра двухъ лицъ, которыя поочередно прибавляютъ.

А и В уславливаются играть слѣдующимъ образомъ: каждый будетъ называть число, большее, чѣмъ то, которое только-что было названо другимъ, но избытокъ называемаго числа надъ тѣмъ числомъ, которое названо непосредственно передъ нимъ, не долженъ превысить десяти; выигрываетъ же тотъ, который раньше получаетъ право назвать число сто.

Въ этой игрѣ, которая приводится уже въ книгѣ Баше (Problèmes plaisants et délectables, Problème XXII) всегда выигрываетъ тотъ, кто первый можетъ назвать одно изъ слѣдующихъ чиселъ

1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89,

если онъ потомъ не будетъ называть другихъ чиселъ, кромѣ тѣхъ, которыя стоятъ въ этомъ ряду. Когда онъ, наконецъ, назоветъ 89, то другой согласно правилу игры можетъ назвать лишь одно изъ чиселъ отъ 90 до 99, послѣ чего сейчасъ же можно назвать число 100 и тѣмъ самымъ выиграть партію. Но для того, чтобы одинъ игрокъ — напримѣръ, А —

http://rutracker.ru

могъ назвать 89, онъ долженъ былъ передъ тѣмъ назвать 78, потому что тогда B, увеличивая число, не можетъ достигнуть числа 89. Далѣе, для того, чтобы имѣть право назвать 78, A передъ тѣмъ долженъ былъ назвать 67 и т. д. Итакъ, чтобы получить тѣ числа, которыя A долженъ назвать для вѣрнаго выигрыша, нужно, какъ видимъ, послѣдовательно вычитать по 11 изъ предѣльнаго числа 100. Если условлено было, что B начинаетъ игру, и онъ называетъ какое-либо число изъ указаннаго ряда, то A долженъ проиграть, если и впредь B будетъ называть только числа того же ряда. Если же B начинаетъ и при этомъ называетъ число, не принадлежащее къ нашему ряду, то A непремѣнно выиграетъ, если только онъ тотчасъ же назоветъ ближайшее число нашего ряда, которое онъ вправѣ назвать, и потомъ всякій разъ будетъ прибавлять по 11 къ числу, которое онъ назвалъ въ предшествующій разъ. Легко понять тотъ общій законъ, по которому составляется подобный рядъ. Если возьмемъ z вмѣсто ста и черезъ d обозначимъ условленный высшій избытокъ называемаго числа надъ непосредственно ему предшествующимъ (въ нашемъ примѣрѣ эта разность равна 10), то формула

$$z - n \cdot (d + 1)$$

выражаетъ тѣ числа, которыя A долженъ будетъ называть одно за другимъ для того, чтобы навѣрно

http://mathesis.ru

выиграть. Напримѣръ, если по условію выигрываетъ тотъ, кто первый вправѣ назвать 40, а условленный высшій избытокъ равенъ 6, то лицо A, должно для выигрыша составить по формулѣ

$$40 - 7n$$

рядъ чиселъ

5, 12, 19, 26, 33

и называть эти числа одно за другимъ.

Если оба игрока A и B знаютъ эту игру и соотвѣтствующій рядъ, то выиграетъ, понятно, тотъ, кто первый начнетъ называть число.

Эту игру можно слегка измѣнить, если условиться, что тотъ проигрываетъ, кто первый вынужденъ будетъ назвать число z. Въ этомъ случаѣ A для выигрыша долженъ называть числа, составленныя по формулѣ

$$z - 1 - n(d + 1),$$

въ которой вмѣсто n нужно подставлять цѣлыя числа; напримѣръ, если z опять равно 40, а $d = 6$, то A будетъ называть слѣдующія числа:

4, 11, 18, 25, 32.

Послѣ того, какъ A будетъ вправѣ назвать и назоветъ 32, его партнеръ по необходимости долженъ будетъ назвать одно изъ чиселъ, заключающихся между 33 и 38. Тогда A скажетъ 39, послѣ

http://rusthesis.ru

чего B, который обязанъ сказать большее число, не превышающее, однако, 40, вынужденъ будетъ назвать 40; такимъ образомъ A выиграетъ, а B проиграетъ.

http://mathesis.ru

§ 14.

Совершенныя числа.

Еще со временъ пиѳагорейцевъ древніе греки съ любовью занимались изученіемъ своеобразныхъ свойствъ различныхъ цѣлыхъ чиселъ: они, именно, изслѣдовали числа въ отношеніи суммы ихъ дѣлителей. Они дѣлили всѣ числа на совершенныя, избыточныя и недостаточныя. Число называется *совершеннымъ*, если оно равно суммѣ всѣхъ своихъ дѣлителей, *избыточнымъ* — если сумма дѣлителей превышаетъ число, и *недостаточнымъ*, если сумма дѣлителей меньше самого числа. При этомъ число 1 считается однимъ изъ дѣлителей, само же число не считается однимъ изъ своихъ дѣлителей. Посредствомъ разложенія числа на простые множители легко найти сумму дѣлителей его; слѣдующіе примѣры покажутъ намъ это. Число 72 равно 8 разъ 9, т. е. равно $2^3 . 3^2$; отсюда слѣдуетъ, что, умноживъ всѣ числа ряда 1, 2, 2^2, 2^3 на всѣ числа ряда 1, 3, 3^2, мы получимъ всѣхъ дѣлителей числа 72, включая самое число 72. Поэтому для полученія суммы дѣлителей числа 72 достаточно умножить сумму $1 + 2 + 2^2 + 2^3$ на сумму $1 + 3 + 3^2$ и изъ полученнаго произведенія вычесть 72. Мы по-

лучимъ такимъ образомъ $15 . 13 - 72 = 123$. Такъ какъ 123 больше 72, то 72 есть избыточное число. Въ видѣ второго примѣра испытаемъ число 880. Разложеніе этого числа на простые множители содержитъ 4 раза простое число 2, одинъ разъ 5 и одинъ разъ 11. Поэтому $880 = 2^4 . 5 . 11$, и мы получимъ всѣхъ дѣлителей числа 880, если перемножимъ каждое число ряда 1, 2, 4, 8, 16 на каждое число ряда 1, 5 и затѣмъ полученныя произведенія умножимъ на каждое число ряда $1 . 11$. Отсюда слѣдуетъ, что сумма дѣлителей числа 880 равна

$$(1 + 2 + 4 + 8 + 16)(1 + 5)(1 + 11) - 880,$$

т. е. равна $31 . 6 . 12 - 880 = 186 . 12 - 880 = 2232 - 880 = 1352$. Такимъ образомъ, и число 880 есть избыточное число. Напротивъ, 147 есть недостаточное число, потому что $147 = 3 . 7^2$, а

$$(1 + 3)(1 + 7 + 49) - 147 = 228 - 147 = 81 < 147.$$

Наконецъ, число 496 есть совершенное, потому что $496 = 2^4 . 31$ и

$$(1 + 2 + 4 + 8 + 16)(1 + 31) - 496 = 31 . 32 - 496 = \\ = 992 - 496 = 496.$$

Еще Евклидъ за 300 лѣтъ до Р. Х. доказалъ, что совершенныя четныя числа получаются отъ умноженія какого-либо простого числа, которое на 1 меньше какой-либо степени числа 2, на ближайшую низшую степень числа 2. Напримѣръ, 31 есть про-

стое число, на 1 меньшее числа 32, т. е. пятой степени числа 2. Если мы умножимъ 31 на ближайшую низшую степень двухъ, т. е. на 16, то мы получимъ совершенное число 496. Что это правило Евклида всегда приводитъ къ совершенному числу, вытекаетъ изъ только-что изложеннаго способа нахожденія суммы дѣлителей числа. Дѣйствительно. если $2^n - 1$ есть простое число, то для полученія суммы дѣлителей числа

$$(2^n - 1) \cdot 2^{n-1}$$

достаточно умножить сумму

$$1 + (2^n - 1)$$

на сумму

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1},$$

и вычесть изъ полученнаго произведенія самое число. Мы получимъ тогда:

$$(1 + 2^n - 1)(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - (2^n - 1) \cdot 2^{n-1} =$$
$$= 2^n (2^n - 1) - 2^{n-1} \cdot (2^n - 1) =$$
$$= (2^n - 1) \cdot (2^n - 2^{n-1}) = (2^n - 1) \cdot 2^{n-1} \cdot (2 - 1) =$$
$$= (2^n - 1) \cdot 2^{n-1}.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что сумма дѣлителей оказывается равной самому числу. Эйлеръ доказалъ, что не можетъ быть другихъ четныхъ совершенныхъ чиселъ помимо тѣхъ, которыя получаются указаннымъ способомъ. Съ другой стороны, недавно было доказано, что ниже нѣкоторой очень высокой

http://mathesis.ru

границы не можетъ быть ни одного нечетнаго совершеннаго числа. Но пока еще не доказано, что вообще нечетныя совершенныя числа не существуютъ. Изъ грековъ позднѣйшей эпохи совершенными числами занимались, главнымъ образомъ, Никомахъ и Ямблихъ Ямблихъ написалъ обширную статью о совершенныхъ числахъ; въ ней онъ утверждаетъ, что миріадъ каждаго разряда содержитъ одно совершенное число. Миріадомъ перваго разряда Ямблихъ называетъ числа отъ 10^4 до 10^8, миріадомъ втораго разряда—числа отъ 10^8 до 10^{12}, и вообще миріадъ n-го разряда заключаетъ числа

$$\text{отъ } 10^{4n} \text{ до } 10^{4(n+1)}.$$

Гульчъ (Hultsch) подвергнулъ это утвержденіе Ямблиха изслѣдованію въ „Извѣстіяхъ Королевскаго Саксонскаго Научнаго Общества“ за 1895 и 1896 г.г.; онъ установилъ, что миріадъ перваго разряда, дѣйствительно, содержитъ одно совершенное число, второй же содержитъ два, третій—ни одного, четвертый—одно, пятый, шестой, седьмой и восьмой не заключаютъ въ себѣ ни одного совершеннаго числа, девятый же, въ свою очередь, содержитъ одно такое число. Такъ какъ формула $(2^p - 1) \cdot 2^{p-1}$ выражаетъ совершенное число лишь въ томъ случаѣ, когда $2^p - 1$ есть простое число, то для того, чтобы быть въ состояніи найти всѣ совершенныя числа, необходимо разысканіе простыхъ чиселъ вида $2^p - 1$.

Разысканіемъ такихъ чиселъ особенно много занимался Мерсеннь (Mersenne), а именно въ книгѣ „Cogitata Physico-Mathematica“, вышедшей въ 1644 г. Прежде всего нужно замѣтить, что число $2^p - 1$ можетъ быть простымъ лишь въ томъ случаѣ, когда p есть простое число. Дѣйствительно, если $p = mn$ и оба числа m и n больше единицы, то изъ дѣлимости числа $x^n - 1$ на число $x - 1$ слѣдуетъ, что и число $2^{mn} - 1$ должно дѣлиться на число $2^m - 1$. Всѣ числа вида $2^p - 1$, гдѣ p есть простое число, были одно за другимъ подвергнуты изслѣдованію; пока изслѣдованіе доведено до $p = 61$. Эту трудную работу взялъ на себя г. Зеельгофъ (Seelhof). Теперь установлено, что при $p \leqq 61$ формула $2^p - 1$ даетъ простое число лишь тогда, когда p равно одному изъ слѣдующихъ чиселъ:

2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61.

Этимъ девяти числамъ соотвѣтствуютъ слѣдующія простыя числа вида $2^p - 1$:

3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287,
2147′483647, 2′305843′009213′693951.

Отсюда получаются, согласно вышеизложенному Евклидову закону составленія совершенныхъ чиселъ, слѣдующія девять совершенныхъ чиселъ:

6, 28, 496, 8128, 33′550336, 8589′869056,
137438′691328; 2′305843′008139′952128
и 2′658455′991569′831744′654692′615953′842176.

Итакъ, до настоящаго времени дѣйствительно вычислены девять совершенныхъ чиселъ; наибольшее изъ нихъ 37-значное. Замѣчательно, что всѣ эти числа кончаются либо цифрой 6, либо цифрами 28. Это не случайность, но общій законъ, доказанный для всѣхъ четныхъ совершенныхъ чиселъ.

Близкимъ къ опредѣленію совершенныхъ чиселъ является опредѣленіе „дружественныхъ“ чиселъ. Два различныхъ числа называются дружественными, если каждое изъ нихъ равно суммѣ дѣлителей другого. Примѣромъ двухъ такихъ чиселъ могутъ служить числа 220 и 284. Дѣйствительно, $220 = 2^2 . 5 . 11$, $284 = 2^2 . 71$; отсюда слѣдуетъ, что сумма дѣлителей числа 220 равна

$$(1 + 2 + 2^2)(1 + 5)(1 + 11) - 220$$
$$= 7 . 6 . 12 - 220 = 504 - 220 = 284,$$

а сумма дѣлителей числа 284 равна

$$(1 + 2 + 4)(1 + 71) = 7 . 72 - 284$$
$$= 504 - 284 = 220.$$

По свидѣтельству Ямблиха уже Пиѳагорейцы установили понятіе о дружественныхъ числахъ. Разысканіемъ общаго закона для нахожденія паръ дружественныхъ чиселъ занимался Декартъ, а послѣ него Эйлеръ.

http://mathesis.ru

§ 15.

Пиѳагоровы и Героновы числа.

Теорема, обратная теоремѣ Пиѳагора, гласитъ, что треугольникъ будетъ прямоугольнымъ, если площадь квадрата, построеннаго на одной сторонѣ его, равна суммѣ площадей квадратовъ, построенныхъ на двухъ другихъ сторонахъ. Основываясь на этомъ, мы можемъ построить прямой уголъ, если отыщемъ три числа x, y, z, удовлетворяющія условію

$$x^2 = y^2 + z^2,$$

и построимъ треугольникъ, стороны котораго въ x, y и z разъ больше нѣкотораго отрѣзка, принятаго за единицу длины. Наименьшія цѣлыя числа, удовлетворяющія условію $x^2 = y^2 + z^2$, суть 5, 4 и 3: дѣйствительно, $5^2 = 25 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9$. Что числа 5, 4 и 3 приводятъ къ прямоугольному треугольнику, было извѣстно, по свидѣтельству грековъ, еще древнимъ египтянамъ: когда въ древнѣйшія времена египтяне закладывали фундаментъ зданія, то при этомъ, согласно свидѣтельству грековъ, гарпедонапты, или натягиватели каната, потому играли роль, что они владѣли искусствомъ втыкать

http://mathesis.ru

въ землю три кола такимъ образомъ, что при этомъ въ точности получался прямой уголъ. Кратчайшая тѣнь, отбрасываемая солнцемъ, даетъ точное направленіе съ сѣвера на югъ: оно служило первой главной линіей въ планѣ воздвигаемаго зданія. Послѣ того, какъ это направленіе было установлено, являлись гарпедонапты и при помощи кольевъ обозначали второе главное направленіе съ востока на западъ. Для этой цѣли они пользовались раздѣленной на двѣнадцать равныхъ частей веревкой, концы которой были соединены другъ съ другомъ; прежде всего они заботились о томъ, чтобы два кола, указывавшіе направленіе съ сѣвера на югъ, были удалены другъ отъ друга на разстояніе четырехъ частей; затѣмъ они при помощи третьяго кола натягивали сомкнутую веревку такимъ образомъ, чтобы до одного кола приходилось пять частей, а до другого три части; такимъ образомъ, два направленія веревки, соотвѣтствовавшія тремъ и четыремъ частямъ, составляли точный прямой уголъ. Отсюда слѣдуетъ, что тотъ, кто придумалъ этотъ египетскій способъ натягивать канатъ, несомнѣнно зналъ, что треугольникъ, стороны котораго относятся другъ къ другу, какъ 3, 4 и 5, долженъ быть прямоугольнымъ. Помимо трехъ чиселъ 3, 4 и 5 извѣстны еще другія три числа 5, 12 и 13, которыя приводятъ къ прямоугольному треугольнику. Эти три числа встрѣчаются въ задачѣ, которая находится въ китайской ариѳметикѣ

„Кіу-чангъ“. Какъ говорятъ китайцы, ариѳметику Кіу-чангъ составилъ Цзинъ Кіу Чау за 2600 лѣтъ до Р. Х. Задача гласитъ: „Въ срединѣ квадратнаго пруда со стороной, равной десяти футамъ, растетъ тростникъ, который возвышается на одинъ футъ надъ уровнемъ воды. Когда его вытянули къ берегу до средины одной стороны пруда, то онъ достигъ какъ разъ края пруда. Какова глубина пруда?“ Отвѣтъ: 12 футовъ. Дѣйствительно, средина пруда, гдѣ тростникъ подымается изъ воды, корень тростника и средина одной стороны квадрата, образуемаго прудомъ, должны представлять собой вершины прямоугольнаго треугольника, стороны котораго равны $12+1$ футамъ, 12 футамъ и половинѣ отъ 10 футовъ.

Всякую группу трехъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, удовлетворяющихъ уравненію $x^2 = y^2 + z^2$, мы будемъ называть Пиѳагоровой тройкой; названіе объясняется связью этого уравненія съ теоремой, открытой Пиѳагоромъ. Разысканіемъ такихъ Пиѳагоровыхъ троекъ занимались еще греческіе математики. Весьма легко найти законъ, при помощи котораго можно съ увѣренностью получить всевозможныя Пиѳагоровы тройки. Прежде всего ясно, что изъ каждой такой тройки можно получить безчисленное множество другихъ новыхъ троекъ, для чего стоитъ лишь увеличить всѣ три числа x, y и z въ одно и то же число разъ. Напримѣръ, числа 6, 8 и 10 или

9, 12 и 15 представляютъ собой Пиѳагоровы тройки, полученныя изъ тройки 3, 4 и 5. Поэтому мы можемъ ограничиться разысканіемъ лишь такихъ троекъ, которыя не имѣютъ общаго дѣлителя. Но въ такомъ случаѣ мы можемъ также предположить, что и два числа y и z, измѣряющія катеты, не имѣютъ общаго дѣлителя. Дѣйствительно, если бы они имѣли общаго дѣлителя, то и число x должно было бы дѣлиться на него, а этотъ случай мы исключили. Пиѳагоровы тройки, составленныя изъ чиселъ, не имѣющихъ общихъ дѣлителей, мы будемъ называть „первоначальными“, а тройки, составленныя изъ чиселъ, которыя имѣютъ общихъ дѣлителей, мы назовемъ „производными“. Чтобы найти всѣ первоначальныя тройки, замѣтимъ прежде всего, что при дѣленіи на 4 квадратъ всякаго четнаго числа даетъ въ остаткѣ нуль, квадратъ же всякаго нечетнаго числа даетъ остатокъ 1. Дѣйствительно,

$$(2n)^2 = 4 \cdot n^2$$

$$\text{и } (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4 \cdot (n^2 + n) + 1.$$

Поэтому, числа y и z, измѣряющія катеты, не могутъ быть одновременно нечетными числами: въ противномъ случаѣ сумма $y^2 + z^2$ при дѣленіи на 4 давала бы остатокъ $1 + 1 = 2$, и, слѣдовательно, число x^2 при дѣленіи на 4 тоже давало бы остатокъ 2, но это невозможно, такъ какъ, согласно вышесказанному, полный квадратъ при дѣленіи на 4 мо-

жетъ давать въ остаткѣ только либо 0, либо 1. Такъ какъ оба числа, измѣряющія катеты, не могутъ также быть одновременно четными (въ противномъ случаѣ они имѣли бы общаго дѣлителя, а именно —дѣлителя 2), то остается лишь случай, когда одно число четное, а другое—нечетное. Предположимъ, что y есть нечетное число, а z—четное число. Перенеся членъ y^2 въ лѣвую часть уравненія, т. е. приведя наше уравненіе къ виду

$$x^2 - y^2 = z^2,$$

мы получимъ какъ въ правой, такъ и въ лѣвой части уравненія числа, кратныя четырехъ. Дѣлимъ обѣ части на 4; принимая во вниманіе, что $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, мы получимъ:

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x-y}{2} = \left(\frac{z}{2}\right)^2.$$

Но числа $\frac{x+y}{2}$ и $\frac{x-y}{2}$ не имѣютъ общихъ дѣлителей. Дѣйствительно, если бы эти числа имѣли общаго дѣлителя, то его имѣли бы какъ сумма этихъ чиселъ, т. е. x, такъ и разность ихъ, т. е. y; слѣдовательно, числа x и y имѣли бы того же общаго дѣлителя. Но это невозможно, такъ какъ, согласно нашему предположенію, три пиѳагоровы числа x, y и z не имѣютъ общихъ дѣлителей. Итакъ, мы доказали, что числа $\frac{x+y}{2}$ и $\frac{x-y}{2}$ не могутъ одно-

http://mirknig.su

временно дѣлиться на одно и то же число. Несмотря на это, произведеніе ихъ должно представлять собой полный квадратъ, а именно квадратъ числа $\frac{z}{2}$. Поэтому оба множителя — какъ $\frac{x+y}{2}$, такъ и $\frac{x-y}{2}$ — сами должны быть полными квадратами. Назовемъ число, квадратъ котораго равенъ $\frac{x+y}{2}$, черезъ v; а число, квадратъ котораго равенъ $\frac{x-y}{2}$, назовемъ черезъ w. Итакъ, мы имѣемъ:

$$\frac{x+y}{2} = v^2 \quad \text{и} \quad \frac{x-y}{2} = w^2.$$

Складывая и вычитывая оба эти равенства, мы получимъ:

$$x = v^2 + w^2 \quad \text{и} \quad y = v^2 - w^2.$$

Такъ какъ $z^2 = x^2 - y^2 = (v^2 + w^2)^2 - (v^2 - w^2)^2 = 2v^2 \cdot 2w^2$, то мы заключаемъ, въ-третьихъ, что $z = 2 \cdot v \cdot w$. Если въ 3 уравненія, выражающія x, y, z черезъ v и w, мы будемъ подставлять вмѣсто v и w какія-либо цѣлыя числа, то мы постоянно будемъ получать для x, y и z числа, удовлетворяющія Пиѳагорову уравненію

$$x^2 = y^2 + z^2.$$

Чтобы эти числа были положительными и не имѣли общихъ дѣлителей, мы должны выбрать числа

http://mathesis.ru

v и w такимъ образомъ, чтобы удовлетворялись троякаго рода условія: во-первыхъ, число v должно быть больше, чѣмъ w; во-вторыхъ, числа v и w не должны имѣть общихъ дѣлителей, и, въ третьихъ, числа v и w не должны быть одновременно нечетными. Посредствомъ трехъ уравненій

$$\left.\begin{array}{l} x = v^2 + w^2 \\ y = v^2 - w^2 \\ z = 2 \cdot v \cdot w \end{array}\right\}$$

мы можемъ получить изъ каждой пары чиселъ v и w, удовлетворяющей указаннымъ условіямъ, три числа x, y и z, составляющихъ первоначальную Пиѳагорову тройку. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что не существуетъ ни одной такой тройки, которая не получалась бы по указанному способу. Итакъ, если мы возьмемъ по порядку

$$\left.\begin{array}{l} v = 2 \\ w = 1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} v = 3 \\ w = 2 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} v = 4 \\ w = 1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} v = 4 \\ w = 3 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} v = 5 \\ w = 2 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} v = 5 \\ w = 4 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} v = 6 \\ w = 1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} v = 6 \\ w = 5 \end{array}\right\} \text{ и т. д.,}$$

то мы можемъ получить всѣ безъ исключенія первоначальныя Пиѳагоровы тройки до сколь угодно большихъ чиселъ. Въ нижеслѣдующей таблицѣ мы приводимъ всѣ тройки, въ которыхъ каждое число содержитъ не болѣе двухъ цифръ.

rubooks.is.ru

v =	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
w =	1	2	1	3	2	4	1	5	2	4	6	1	3	5	2	4
x =	5	13	17	25	29	41	37	61	53	65	85	65	73	89	85	97
y =	3	5	15	7	21	9	35	11	45	33	13	63	55	39	77	65
z =	4	12	8	24	20	40	12	60	28	56	84	16	48	80	36	72

Такъ какъ для полученія первоначальной тройки необходимо, чтобы одно изъ чиселъ v и w было четное, а другое—нечетное, то четное число, измѣряющее катетъ, непремѣнно должно дѣлиться на 4, такъ какъ оно равно $2 . v . w$. Далѣе, какъ какъ число, измѣряющее гипотенузу, равно суммѣ $v^2 + w^2$, то при дѣленіи на 4 оно должно давать въ остаткѣ 1; отсюда слѣдуетъ еще, что, если это число само не есть простое, то оно должно быть равно произведенію такихъ простыхъ чиселъ, которыя при дѣленіи на 4 даютъ въ остаткѣ 1 [12]). Изъ трехъ выше выведенныхъ основныхъ формулъ слѣдуетъ также, что числа $x+z$ и $x-z$ непремѣнно должны быть полными квадратами.

Изъ первоначальныхъ троекъ, представленныхъ на предыдущей таблицѣ, мы можемъ получить всѣ производныя, для чего стоитъ лишь умножать всѣ три числа каждой тройки на всевозможныя числа. Далѣе, если мы будемъ умножать три числа каждой тройки на любое раціональное число, то мы получимъ всѣ тѣ раціональныя числа, которыя, будучи разсма-

триваемы, какъ мѣры сторонъ треугольника, приводятъ къ прямоугольнымъ треугольникамъ. Такъ, напримѣръ, умножая числа первоначальной тройки 17, 15 и 8 на $\frac{3}{4}$, мы получимъ раціональную тройку

$$21\frac{1}{4},\ 18\frac{3}{4},\ 10.$$

Въ тѣсной связи съ Пиѳагоровыми тройками, приводящими къ прямоугольнымъ треугольникамъ, находятся Героновы числа. Послѣднія получили свое названіе по имени Герона Александрійскаго, который жилъ приблизительно за 150 лѣтъ до Р. Х. и по справедливости считается отцомъ землемѣровъ. Этому Герону мы обязаны важнымъ правиломъ, посредствомъ котораго можно найти площадь треугольника, зная длину трехъ его сторонъ. Согласно этому правилу нужно вычесть изъ полупериметра (назовемъ его черезъ s) треугольника каждую изъ трехъ сторонъ a, b и c, перемножить между собой полученныя три разности и число s и изъ произведенія этихъ четырехъ множителей извлечь квадратный корень. Найденный такимъ образомъ результатъ дастъ намъ величину площади. Напримѣръ, если стороны треугольника равны 5, 6 и 7 сантиметрамъ, то s равно 9 сантиметрамъ, $s - a = 4$, $s - b = 3$, $s - c = 2$. Итакъ, мы должны извлечь квадратный корень изъ произведенія 9.4.3.2, что приводитъ къ выраженію $6\sqrt{6}$. Вычисливъ это выраженіе до третьяго десятичнаго знака, мы найдемъ число

14,697. Итакъ, площадь треугольника со сторонами въ 5, 6 и 7 сантиметровъ равна 14,697 квадратнымъ сантиметрамъ. Въ этомъ примѣрѣ квадратный корень оказался ирраціональнымъ числомъ, которое можно представить при помощи раціональнаго числа лишь съ приближеніемъ. Но Геронъ Александрійскій далъ примѣръ трехъ цѣлыхъ чиселъ, для которыхъ квадратный корень извлекается точно, а именно: $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. Эти три числа приводятъ къ квадратному корню изъ произведенія $(21 . 8 . 7 . 6)$, который равенъ 84. Естественно возникаетъ вопросъ о разысканіи метода, посредствомъ котораго можно было бы получить всѣ возможныя тройки цѣлыхъ чиселъ, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что треугольникъ, стороны котораго измѣряются такими тремя числами, имѣетъ площадь, которая также выражается цѣлымъ числомъ. Въ честь Герона мы будемъ называть каждыя три такихъ цѣлыхъ числа Героновой тройкой. Чтобы найти всѣ возможныя Героновы тройки, мы прежде всего примемъ, что треугольникъ имѣетъ три раціональныя стороны a, b и c и площадь J, которая выражается раціональнымъ числомъ. Въ такомъ случаѣ и всѣ высоты h должны измѣряться раціональными числами, ибо каждая высота равна частному отъ дѣленія удвоенной площади на соотвѣтствующую сторону. Кромѣ того, каждая проекція стороны на другую сторону должна быть раціональной, потому

что, согласно обобщенной теоремѣ Пиѳагора, ее можно выразить раціонально черезъ стороны. Напримѣръ, проекція стороны b на сторону a равна

$$\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2 \cdot a}.$$

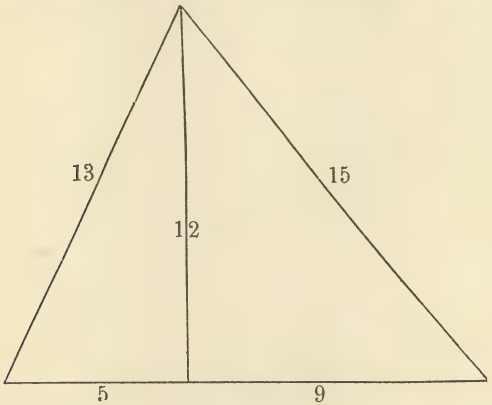
Но отсюда слѣдуетъ, что, если стороны и площадь какого-нибудь треугольника измѣряются раціональными числами, то каждая высота должна разсѣкать его на два такихъ прямоугольныхъ треугольника, стороны которыхъ тоже выражаются раціонально. Итакъ, для полученія всевозможныхъ треугольниковъ съ раціональными сторонами и раціональной площадью достаточно сложить всѣми возможными способами два прямоугольныхъ треугольника съ раціональными сторонами. Три стороны всякаго такого треугольника послѣ соотвѣтственнаго умноженія даютъ Геронову тройку. Такимъ образомъ, мы можемъ изъ всякихъ двухъ Пиѳагоровыхъ троекъ составить различными способами одну Геронову тройку. Такъ, вышеупомянутый примѣръ Герона Александрійскаго.

13, 14 и 15

получается посредствомъ сопоставленія двухъ Пиѳагоровыхъ троекъ 13, 12, 5 и 5, 4, 3. Будемъ разсматривать 13, какъ сторону, 12—какъ высоту и

http://mathesis.ru

5 — какъ проекцію. Такъ какъ оба прямоугольныхъ треугольника должны имѣть одинъ общій катетъ, который будетъ служить у насъ высотой, то мы должны увеличить въ 3 раза числа тройки 5, 4, 3; тогда мы получимъ 15, 12 и 9. Сложимъ теперь оба прямоугольныхъ треугольника: тогда двумя сторонами искомаго треугольника будутъ гипотенузы 13 и 15, а третья сторона получится, какъ сумма катетовъ 5 и 9. (См. прилагаемую фигуру).



Полученный треугольникъ является здѣсь суммой обоихъ составляющихъ его прямоугольныхъ треугольниковъ. Но онъ всегда можетъ быть получен и какъ разность. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ числа получающейся Героновой тройки будутъ слѣдующія: 13, 15 и 9 — 5 = 4. Дѣйствительно, квадратный корень извлекается и въ этомъ случаѣ, ибо

квадратный корень долженъ извлекаться изъ произведенія $s(s-a)(s-b)(s-c) = 16 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 12 = 4^2 \cdot 6^2$. Площадь окажется равной 24; этотъ результатъ мы могли бы получить и изъ соотношенія $J = \frac{4 \cdot 12}{2}$.

Чтобы показать, что изъ одной и той же пары Пиѳагоровыхъ троекъ можно получить нѣсколько Героновыхъ, мы разсмотримъ числа 5, 3, 4 и 17, 15, 8. Первая тройка даетъ производную 25, 15, 20. Мы получимъ такимъ образомъ Геронову тройку 17, 25, 28. Если же мы умножимъ на 5, а не на 2, т. е. возьмемъ тройку 10, 6, 8 и соединимъ ее съ тройкой 17, 15, 8, то мы получимъ тройку 10, 17, 21. Далѣе, тѣ же двѣ Пиѳагоровы тройки 5, 3, 4 и 17, 15, 8 приводятъ при посредствѣ троекъ 40, 24, 32 и 51, 45, 24 къ Героновой тройкѣ 40, 51, 77. Наконецъ, черезъ посредство чиселъ 75, 45, 60 и 68, 60, 32 мы получимъ еще одну Геронову тройку 75, 68, 77. Легко понять, что каждая пара Пиѳагоровыхъ троекъ дастъ намъ такимъ образомъ четыре Героновы тройки. Напримѣръ, если мы будемъ исходить изъ чиселъ 29, 21, 20 и 41, 9, 40, то мы получимъ слѣдующія Героновы тройки:

1) 58, 41, 51; 2) 87, 287, 340; 3) 1160, 861, 989;
4) 261, 820, 989.

Сюда присоединяются еще четныя тройки, которыя получаются не путемъ складыванія неравныхъ катетовъ, но посредствомъ вычитанія.

http://mathesis.ru

Особымъ видомъ Героновыхъ троекъ являются тѣ, въ которыхъ два числа равны другъ другу. Онѣ получаются посредствомъ складыванія Пиѳагоровой тройки съ самой собой: каждая Пиѳагорова тройка даетъ двѣ такія особенныя Героновы тройки. Напримѣръ,

числа 5, 3, 4 даютъ 5, 5, 6 и 5, 5, 8;
13, 5, 12 даютъ 13, 13, 10 и 13, 13, 24;
17, 15, 8 даютъ 17, 17, 30 и 17, 17, 16;
и т. д., и т. д.

http://mathesis.ru

§ 16.

Затрудненное дѣленіе.

Въ журналахъ для легкаго чтенія часто встрѣчаются задачи, въ которыхъ требуется сдѣлать дѣленіе при нѣкоторыхъ особенныхъ, затрудняющихъ его условіяхъ. Эти задачи, большей частью, представляютъ собой видоизмѣненія задачъ, предложенныхъ и рѣшенныхъ Баше въ его книгѣ „Problèmes plaisants et délectables“. Одна изъ этихъ задачъ состоитъ въ слѣдующемъ: „Три лица должны подѣлить между собой 21 бочку одинаковой величины; изъ нихъ 7 совершенно наполнены виномъ, 7 — наполнены до половины, а 7 остальныхъ — пусты. Дѣленіе нужно выполнить такъ, чтобы всѣ получили по равному числу бочекъ и по одинаковому количеству вина. Легко найти два рѣшенія задачи Обозначимъ три лица черезъ A, B и C, полную бочку — знакомъ (1), бочку, наполненную до половины, — черезъ $(\frac{1}{2})$ и пустую бочку — знакомъ (0); тогда первое рѣшеніе можно представить сокращенно въ слѣдующемъ видѣ:

$$A: 1.(1)+5.(\tfrac{1}{2})+1.(0).$$
$$B: 3.(1)+1.(\tfrac{1}{2})+3.(0);$$
$$C: 3.(1)+1.(\tfrac{1}{2})+3.(0).$$

http://math.ru

Второе рѣшеніе можно написать такъ:

A: $2.(1)+3.(\frac{1}{2})+2.(0)$;
B: $2.(1)+3.(\frac{1}{2})+2.(0)$;
C: $3.(1)+1.(\frac{1}{2})+3.(0)$.

Если мы замѣнимъ въ предыдущей задачѣ число 7 числомъ 9, оставивъ прочія условія безъ измѣненія, т. е. пожелаемъ подѣлить какъ бочки, такъ и вино поровну между тремя лицами, то будемъ имѣть три рѣшенія, которыя читатель найдетъ безъ труда.

Болѣе трудны такія задачи на дѣленіе, въ которыхъ числа пустыхъ, полуполныхъ и полныхъ бочекъ не равны другъ другу. Напримѣръ, г. Labosne, выпустившій 4-ое изданіе книги Б а ш е „Problèmes“, разсматриваетъ случай 24-хъ бочекъ: 5 совершенно полныхъ, 8 — пустыхъ и 11 наполненныхъ до половины. Эта задача допускаетъ три рѣшенія, а именно:

I) A: $0.(1)+7.(\frac{1}{2})+1.(0)$:
B: $2.(1)+3.(\frac{1}{2})+3.(0)$;
C: $3.(1)+1.(\frac{1}{2})+4.(0)$.
II) A: $1.(1)+5.(\frac{1}{2})+2.(0)$:
B: $2.(1)+3.(\frac{1}{2})+3.(0)$;
C: $2.(1)+3.(\frac{1}{2})+3.(0)$.
III) A: $1.(1)+5.(\frac{1}{2})+2.(0)$;
B: $1.(1)+5.(\frac{1}{2})+2.(0)$;
C: $3.(1)+1.(\frac{1}{2})+4.(0)$.

Къ задачамъ этого же рода относятся и весьма распространенныя задачи о дѣлежѣ наслѣдства; изъ

http://mathesis.ru

нихъ мы разсмотримъ слѣдующую: отецъ оставляетъ завѣщаніе, согласно которому состояніе его должно быть подѣлено между его семью дѣтьми слѣдующимъ образомъ. Старшій ребенокъ долженъ получить 100 рублей и восьмую часть остатка; второй долженъ затѣмъ получить 200 рублей и восьмую часть новаго остатка и такъ далѣе — до седьмого ребенка, который долженъ получить 700 рублей и восьмую часть все еще получающагося остатка. Оказалось, что при этомъ всѣ семеро получили поровну. Спрашивается, сколь велико было оставленное наслѣдство? Оно оказывается равнымъ 4900 рублямъ. Рѣшеніе получается слѣдующимъ образомъ: назвавъ искомое число черезъ x и выразивъ уравненіемъ условіе равенства всѣхъ частей, рѣшаемъ уравненіе относительно x. Что рѣшеніе должно привести къ 4900, видно изъ слѣдующей повѣрки:

$$1)\ 100+\frac{4800}{8}=700;$$

$$2)\ 200+\frac{4000}{8}=700;$$

$$3)\ 300+\frac{3200}{8}=700;$$

. . . . . .

$$7)\ 700+\frac{0}{8}=700.$$

Въ задачѣ другого рода, относящейся къ дѣлежу наслѣдства и возникшей еще къ эпоху рим-

http://mathesis.ru

скихъ императоровъ, трудность дѣлежа заключается въ слѣдующемъ. Нѣкто надѣется стать отцомъ, но передъ рожденіемъ ребенка онъ опасно заболѣваетъ и въ виду этого составляетъ завѣщаніе, въ которомъ указываетъ, какая часть его состоянія должна перейти къ матери и какая — къ ожидаемому ребенку, при чемъ распредѣленіе находится въ зависимости отъ того, будетъ ли ребенокъ мужескаго пола или женскаго. Напримѣръ, въ случаѣ рожденія мальчика мать должна получить 4 части, а ребенокъ — 5 частей состоянія; въ случаѣ же рожденія дѣвочки мать получаетъ 3 части, а дочь — 2 части. Случилось, однако, такъ, что мать родила близнецовъ: мальчика и дѣвочку. Спрашивается, какъ слѣдуетъ раздѣлить наслѣдство. Если существенной стороной воли завѣщателя мы будемъ считать отношеніе доли m матери къ долѣ s сына и къ долѣ t дочери, то для рѣшенія вопроса мы должны будемъ соединить двѣ пропорціи

$$m : s = 4 : 5,$$
$$m : t = 3 : 2$$

въ одну; тогда мы получимъ:

$$m : s : t = 12 : 15 : 8.$$

Итакъ, если все состояніе составляло, напримѣръ, 35000 рублей, то мать должна была получить 12000 рублей, сынъ—15000 рублей, а дочь—8000 рублей. Таково обычное рѣшеніе задачи. Но

http://rutheses.ru

это рѣшеніе весьма неблагопріятно для матери. Дѣйствительно, если изъ завѣщательныхъ распоряженій мы усмотримъ послѣднюю волю завѣщателя въ томъ, чтобы въ случаѣ рожденія сына мать получила $\frac{4}{9}$, а въ случаѣ рожденія дочери $\frac{3}{5}$ всего состоянія, то можно будетъ отсюда вывести заключеніе, что завѣщатель имѣлъ въ виду оставить матери, по меньшей мѣрѣ, $\frac{4}{9}$ состоянія. Но въ такомъ случаѣ она должна получить $15555\frac{5}{9}$ рублей, на долю же обоихъ близнецовъ останется $19444\frac{4}{9}$ рубля.

Согласно волѣ наслѣдователя сынъ долженъ получить $\frac{5}{4}$ доли матери, а дочь — $\frac{2}{3}$ доли матери, такъ что отношеніе долей сына и дочери равно $\frac{5}{4} : \frac{2}{3}$, т. е. 15 : 8. Поэтому сумму въ $19444\frac{4}{9}$ руб., остающуюся за вычетомъ доли матери, слѣдуетъ раздѣлить въ отношеніи 15 къ 8, т. е. сынъ долженъ получить $12681\frac{33}{207}$ руб., а дочь — $6763\frac{59}{207}$ руб. Изъ возможности двухъ рѣшеній задачи мы видимъ, что воля завѣщателя формулирована въ завѣщаніи недостаточно ясно, такъ какъ это завѣщаніе допускаетъ два различныхъ толкованія послѣдней воли.

Въ математическомъ отношеніи больше интереса представляютъ задачи о дѣлежѣ между двумя игроками, которымъ какое-либо обстоятельство помѣшало продолжать игру, вслѣдствіе чего имъ приходится прервать серію партій и потому они хотятъ раздѣлить между

http://rutracker.ru

собой ставку, сообразуясь съ числомъ партій, которыя выигралъ каждый изъ нихъ. Именно этого рода задачи дали поводъ Паскалю и Ферматy создать около 1650 года новую область математики: мы говоримъ объ исчисленіи вѣроятностей, которое въ настоящее время находитъ себѣ столь важное примѣненіе въ страховомъ дѣлѣ. Начнемъ съ простого примѣра. Два одинаково опытныхъ игрока A и B играютъ въ игру, которая зависитъ также отъ случая: можно поэтому принять, что вѣроятность выигрыша одинакова для каждаго изъ нихъ и поэтому равна $\frac{1}{2}$. Оба поставили одинаковую сумму денегъ. Согласно уговору всю ставку получаетъ тотъ, кто первый выиграетъ пять партій. Послѣ того, какъ A выигралъ 4 партіи, а B—3, наступаетъ событіе, которое заставляетъ ихъ прервать серію игръ. Является вопросъ, въ какомъ отношеніи они должны подѣлить ставку. Отвѣтъ гласитъ, что игроку A слѣдуетъ получить $\frac{3}{4}$ ставки, а лицу B—$\frac{1}{4}$ ея. Это можно такъ обосновать. Игрокъ B выигралъ бы серію лишь въ томъ случаѣ, если бы онъ выигралъ обѣ слѣдующія партіи, т. е. восьмую и девятую. Вѣроятность же этого равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, т. е. $\frac{1}{4}$. Уже одно это соображеніе оправдываетъ вышеприведенный отвѣтъ. Для повѣрки мы вычислимъ также вѣроятность выигрыша для игрока A. Послѣдній выиграетъ игру въ двухъ случаяхъ: во-первыхъ, если онъ выиграетъ восьмую партію; во-вторыхъ, если даже восьмую пар-

тію выиграетъ B, но девятую выиграетъ A; отсюда находимъ вѣроятность выигрыша для A равной

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Рѣшеніе подобныхъ задачъ нѣсколько труднѣе въ томъ случаѣ, когда разность между условленнымъ для выигрыша числомъ партій и числомъ партій, дѣйствительно выигранныхъ лицомъ A и лицомъ B до перерыва, больше, чѣмъ въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ. Для второго примѣра достаточно принять, что условіе выигрыша осталось прежнее, т. е. игру выигрываетъ тотъ, что первый выиграетъ 5 партій, но что до перерыва A выигралъ 3 партіи, а B — одну. Чтобы возможно яснѣе и нагляднѣе представить въ этомъ примѣрѣ благопріятные для каждаго игрока шансы, мы обозначимъ черезъ a случай, когда партію выигрываетъ A, случаи же выигрыша партіи игрокомъ B мы обозначимъ буквой b, и затѣмъ мы будемъ писать буквы a и b по порядку одну за другой. Такимъ образомъ символъ

a b b a

выражаетъ, напримѣръ, что ближайшую, т. е. пятую, партію выигрываетъ A, шестую и седьмую — B, а восьмую снова A. Пользуясь этими обозначеніями, мы можемъ изобразить случаи, благопріятные для игроковъ A и B, слѣдующимъ образомъ:

http://rusthesis.ru

для A:	для B:
1) a a	1) b b b b
2) a b a	2) b b b a b
3) a b b a	3) b b a b b
4) a b b b a	4) b a b b b
5) b a a	5) a b b b b
6) b a b a	
7) b a b b a	
8) b b a a	
9) b b a b a	
10) b b b a a	

Отсюда получимъ вѣроятность выигрыша для A:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32},$$

или $\frac{26}{32} = \frac{13}{16}$.

Для B получимъ:

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32},$$

или $\frac{6}{32} = \frac{3}{16}$.

То обстоятельство, что сумма обѣихъ дробей $\frac{13}{16}$ и $\frac{3}{16}$, которыми выражаются вѣроятности, равна 1, подтверждаетъ правильность вычисленія. Итакъ, въ этомъ примѣрѣ ставку слѣдуетъ подѣлить такимъ образомъ, чтобы A получилъ $\frac{13}{16}$ всей суммы, а B — всего лишь $\frac{3}{16}$.

Математика даетъ исчерпывающее рѣшеніе подобныхъ задачъ на дѣлежъ въ общемъ случаѣ, когда для выигрыша ставки необходимо выиграть

γ партій, изъ которыхъ A имѣетъ уже α, а B уже имѣетъ β, при чемъ вѣроятность выигрыша одной партіи равна p для A и $1-p$ для B. Изложеніе наиболѣе общаго результата представлялось бы здѣсь слишкомъ сложнымъ.

---

http://mathesis.ru

§ 17.

Софизмы.

1. Когда операціи сложенія, вычитанія и умноженія совершаются надъ равными величинами, то получаются равные результаты. Если же сопряженіе равныхъ величинъ производится посредствомъ дѣленія, то результаты необходимо равны лишь въ томъ случаѣ, когда дѣлители отличны отъ нуля. Если же не принимать во вниманіе условія, что дѣлители должны быть отличны отъ нуля, то можно придти къ ложнымъ заключеніямъ, которыми часто пользуются для полученія мнимыхъ доказательствъ того, что два неравныхъ числа равны другъ другу,—напримѣръ, что $5=7$. Съ цѣлью поставить на скользкій путь лицо, не обладающее основательнымъ знаніемъ ариѳметики, мы для отвода глазъ должны стараться по возможности скрыть дѣленіе на число, которое равно нулю. Покажемъ на примѣрѣ, какъ это можно осуществить.

Назовемъ черезъ a число, которое въ $1\frac{1}{2}$ раза больше числа b. Итакъ, $a=\frac{3}{2}b$; умножая на 4, получимъ:

$$4a=6b,$$

или, что то же:

$$14a-10a=21b-15b.$$

http://mathesis.ru

Послѣ перенесенія членовъ мы получимъ:

$$15b - 10a = 21b - 14a.$$

Вынося за скобки въ лѣвой части 5, а въ правой 7, получимъ:

$$5(3b - 2a) = 7(3b - 2a).$$

Дѣленіе обѣихъ частей равенства на $3b - 2a$ даетъ равенство $5 = 7$.

2. Софизмы другого рода основаны на двузначности квадратнаго корня. Если $x^2 = y^2$, то отсюда еще не слѣдуетъ, что число x непремѣнно равно y; можно лишь утверждать, что либо $x = +y$, либо же $x = -y$. Какое изъ этихъ двухъ равенствъ имѣетъ мѣсто, нельзя указать безъ особыхъ условій и часто можетъ быть установлено только вытекающими изъ нихъ соотношеніями. Напримѣръ, равенство $a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2$ несомнѣнно справедливо, такъ какъ обѣ части его отличаются другъ отъ друга парядкомъ членовъ; но отсюда нельзя заключить, что $a - b = b - a$, потому что такое заключеніе приводитъ къ утвержденію, что $a = b$. Но мы, конечно, вправѣ сказать, что либо $a - b = +(b - a)$, либо $a - b = -(b - a)$; въ данномъ примѣрѣ справедливо лишь второе равенство, т. е. $-(b - a) = a - b$. На соотвѣтствующемъ ложномъ заключеніи основывается, напримѣръ, слѣдующее доказательство равенства $9 = 5$. Такъ какъ

$$9 + 5 = 2 \cdot 7,$$

то, умножая обѣ части этого равенства на разность $9-5$, мы получимъ равенство:

$$9^2-5^2=2\,.\,7\,.\,9-2\,.\,7\,.\,5.$$

Отсюда слѣдуетъ, что:

$$9^2-2\,.\,9\,.\,7=5^2-2\,.\,5\,.\,7.$$

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ равенства по 7^2, получимъ:

$$9^2-2\,.\,9\,.\,7+7^2=5^2-2\,.\,5\,.\,7+7^2.$$

Если мы по извлеченіи изъ обѣихъ частей квадратнаго корня сдѣлаемъ заключеніе, что

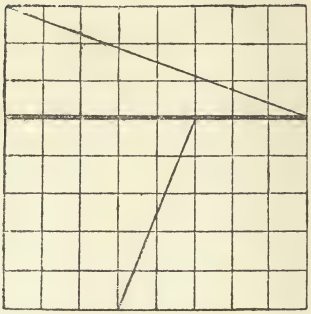
$$9-7=5-7,$$

и прибавимъ къ обѣимъ частямъ равенства по 7, то мы найдемъ, что

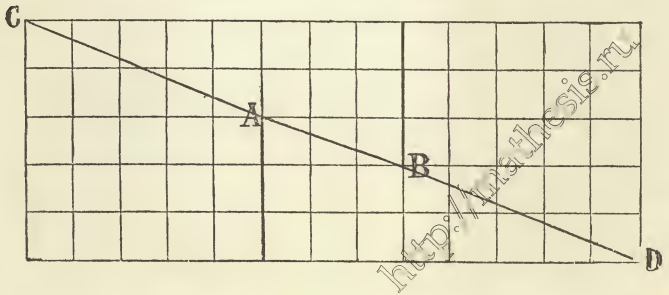
$$9=5.$$

3. Равенство двухъ неравныхъ чиселъ можно доказать еще третьимъ способомъ: посредствомъ геометрическаго обмана. Наибольшей извѣстностью пользуется слѣдующее мнимое доказательство того, что $64=65$.

На чертежѣ представленъ квадратъ, состоящій изъ 8 разъ 8 равныхъ квадратныхъ клѣтокъ и разрѣзанный на 4 части: на два равныхъ прямоугольныхъ треугольника съ катетами 3 и 8 (за единицу длины мы принимаемъ сторону маленькаго квадрата) и на двѣ равныя прямоугольныя трапеціи; въ каждой



изъ нихъ оба основанія и перпендикулярная къ нимъ сторона соотвѣтственно равны 5, 3 и 5. Каждый прямоугольный треугольникъ можно поэтому сложить съ трапеціей и составить такимъ образомъ новый большой прямоугольный треугольникъ съ катетами 5 и $5 + 8$. Этимъ путемъ мы получимъ два такихъ большихъ прямоугольныхъ треугольника, изъ которыхъ какъ видно не прилагаемой фигурѣ, можно составить прямоугольникъ со сторонами 5 и 13.



http://mathesis.ru

Первоначальные 64 квадрата превратились такимъ образомъ въ 65 такихъ же квадратовъ, откуда слѣдуетъ, что $64 = 65$. Обманъ здѣсь заключается въ томъ, что мы считаемъ прямой ту линію, которая во второмъ чертежѣ соединяетъ вершины двухъ противоположныхъ угловъ, въ дѣйствительности же она не можетъ не быть ломанною. Если бы она была прямая, то, согласно теоремѣ о пропорціональныхъ линіяхъ, мы должны были бы заключить, что отношеніе $3:5$ равно $8:13$; это невѣрно, такъ какъ $\frac{3}{5} = \frac{39}{65}$, а $\frac{8}{13} = \frac{40}{65}$. Вслѣдствіе того, что эта линія ломанная, вершины C и D противоположныхъ угловъ и угловыя точки A и B, которыя будто бы лежатъ на прямой, соединяющей вершины C и D, въ дѣйствительности представляютъ собою вершины очень растянутаго параллелограмма, равновеликаго маленькому квадрату.

Подобно тому, какъ мы поступили съ квадратомъ, состоящимъ изъ 8×8 квадратныхъ клѣтокъ, можно поступить также и со всякимъ квадратомъ, состоящимъ изъ $n \times n$ клѣтокъ, если n есть одно изъ чиселъ ряда

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

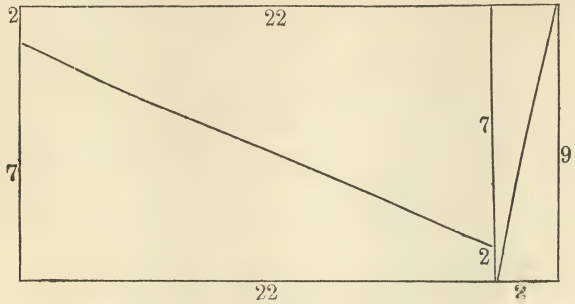
Для полученія чиселъ этого ряда исходятъ изъ чиселъ 1 и 2; начиная съ третьяго, каждый членъ равенъ суммѣ двухъ предшествующихъ. Эти числа суть числители и знаменатели подходящихъ дробей періодической непрерывной дроби, которая имѣетъ

http://mathesis.ru

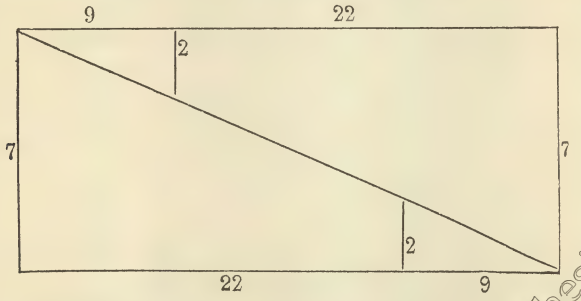
періодъ 1 и представляетъ собою ирраціональное отношеніе золотого дѣленія. Два числа, предшествующія одному какому-либо числу этого ряда, указываютъ, въ какомъ отношеніи нужно раздѣлить соотвѣтствующій квадратъ. Напримѣръ, для квадрата 8×8 это отношеніе равно $3:5$. Для квадрата изъ 13×13 клѣтокъ соотвѣтственное отношеніе равно $5:8$, и подобно тому, какъ мы выше доказывали, что $64 = 65$, мы можемъ доказать, что $169 = 168$. Затѣмъ вышло бы, что $21 \times 21 = 13 \times 34$ и т. д. При этомъ оказывается, что линія, которую по ошибкѣ принимаютъ за прямую, на самомъ дѣлѣ есть весьма вытянутый параллелограммъ съ площадью, равной одной квадратной клѣткѣ: ее нужно отнять или прибавить къ площади полученнаго прямоугольника, и лишь тогда получится площадь первоначальнаго квадрата.

Къ подобнымъ геометрическимъ обманамъ можно придти также, если исходить изъ двухъ какихъ-нибудь послѣдовательныхъ подходящихъ дробей какой-либо непрерывной дроби. Дѣйствительно, если $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ суть послѣдовательныя подходящія дроби нѣкоторой непрерывной дроби, то произведенія $a.d$ и $b.c$ отличаются другъ отъ друга лишь на одну единицу. Напримѣръ, послѣдовательными подходящими дробями $\frac{7}{24}$ и $\frac{9}{31}$ можно воспользоваться для мнимаго доказательства того, что $216 = 217$. Съ этой

цѣлью мы воспользуемся прямоугольникомъ, состоящимъ изъ 9 . 24 квадратныхъ клѣтокъ, и разрѣжемъ его на части, указанныя на прилагаемомъ чертежѣ.



Изъ этихъ четырехъ частей можно какъ будто составить прямоугольникъ такого вида:



Такимъ образомъ, повидимому, получается, будто 9 . 24, т. е. 216 квадратныхъ клѣтокъ имѣютъ такую же площадь, какъ и 7 . 31, т. е. 217 такихъ же самыхъ квадратныхъ клѣтокъ.

http://dlib.rsl.ru

4. Четвертый родъ софизмовъ основанъ на томъ, что суммѣ безконечнаго множества чиселъ приписываютъ безконечно большую величину. Несомнѣнно, сумма безконечнаго множества цѣлыхъ положительныхъ чиселъ безконечно велика, т. е., продолжая сложеніе достаточно далеко, мы можемъ достигнуть того, что сумма превыситъ всякое заданное сколь-угодно большое число. Даже сумма, составленная исключительно изъ правильныхъ дробей, изъ которыхъ каждая меньше предыдущей, можетъ оказаться безконечно великой, — напримѣръ, сумма такъ называемаго гармоническаго ряда:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\cdots$$

Что эта сумма чиселъ, обратныхъ всѣмъ цѣлымъ числамъ, начиная съ числа 2, можетъ быть сдѣлана больше любого заданнаго числа, если только мы возьмемъ достаточно большое число членовъ, — это можно доказать слѣдующимъ образомъ. Заключимъ въ скобки, во-первыхъ, $\tfrac{1}{2}$, затѣмъ сумму $\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}$, затѣмъ сумму $\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}$, затѣмъ сумму отъ $\tfrac{1}{9}$ до $\tfrac{1}{16}$ включительно и т. д. Тогда число въ первыхъ скобкахъ равно $\tfrac{1}{2}$, величина суммы, заключенной внутри вторыхъ скобкахъ, превышаетъ $\tfrac{1}{2}$, потому что $\tfrac{1}{3} > \tfrac{1}{4}$, величина суммы внутри третьихъ скобокъ тоже больше $\tfrac{1}{2}$, потому что $\tfrac{1}{5} > \tfrac{1}{8}$, $\tfrac{1}{6} > \tfrac{1}{8}$ и $\tfrac{1}{7} > \tfrac{1}{8}$, и т. д. Такимъ образомъ мы видимъ, что сумма всѣхъ дробей, заключенныхъ въ n первыхъ скоб-

кахъ, непремѣнно будетъ больше, чѣмъ $\frac{1}{2}$ a. Поэтому, если мы желаемъ, чтобы сумма стала больше нѣкотораго сколь угодно большого числа b, то нужно лишь воспользоваться 2 . b разъ скобками для сложенія, т. е. нужно продолжить суммованіе дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ и т. д. до дроби $\frac{1}{2^{2b}}$ включительно. Тогда мы получимъ сумму, которая навѣрное больше числа b.

Если же мы будемъ складывать дроби, изъ которыхъ каждая есть c-ая часть предшествующей, то, сколько бы мы ни продолжали сложеніе, сумма никогда не превыситъ извѣстнаго предѣла, который можно указать, хотя она и будетъ все время приближаться къ нему. Примѣромъ можетъ служить извѣстный рядъ:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \cdots$$

Если мы, суммируя, возьмемъ лишь первые три члена, то получимъ сумму $1\frac{3}{4}$. Если будемъ прибавлять еще по одному члену, то получимъ послѣдовательно $1\frac{7}{8}$, $1\frac{15}{16}$, $1\frac{31}{32}$, $1\frac{63}{64}$ и т. д. Легко видѣть, что получающіяся суммы имѣютъ своимъ предѣломъ число 2, т. е., хотя всѣ онѣ меньше числа 2, но все болѣе приближаются къ нему. Этотъ примѣръ показываетъ намъ такимъ образомъ, что сумма безконечнаго множества дробей не всегда безконечно велика, но можетъ также сколь угодно мало отличаться отъ нѣкотораго к о н е ч н а г о числа, которое можно указать: въ нашемъ примѣрѣ это число есть 2. На

игнорированіи этой истины основанъ, между прочимъ, софизмъ Зенона Элейскаго (Aristoteles, Physica, liber VI, глава 9). Этотъ софизмъ можно изложить такъ: Ахиллесъ преслѣдовалъ черепаху, которая находилась впереди него на разстояніи одной стадіи; скорость Ахиллеса въ 10 разъ больше скорости черепахи. Зенонъ утверждаетъ: Ахиллесъ никогда не догонитъ черепахи. Ибо, пока онъ пройдетъ первую стадію, черепаха проползетъ $\frac{1}{10}$ стадіи; когда Ахиллесъ пройдетъ это разстояніе, черепаха снова опередитъ его — на $\frac{1}{100}$ стадіи; когда же Ахиллесъ пройдетъ и это разстояніе, то животное подвинется впередъ на $\frac{1}{1000}$ стадіи, и т. д. Мы видимъ, что путь, пройденный Ахиллесомъ, состоитъ изъ безчисленнаго множества отрѣзковъ, и каждый изъ нихъ равенъ $\frac{1}{10}$ части предшествующаго. Но такая сумма имѣетъ конечную величину. Дѣйствительно, Ахиллесъ пройдетъ ровно столько стадій, сколько заключается въ суммѣ

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$$

Эта сумма равна $1\frac{1}{9}$ стадіямъ. Точно такимъ же образомъ мы найдемъ, что путь, пройденный черепахой, равенъ

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}},$$

т. е. содержитъ $\frac{1}{9}$ стадіи. Такимъ же образомъ и время, за какое Ахиллесъ успѣетъ догнать чере-

http://mathesis.ru

паху, представится, какъ сумма безчисленнаго множества промежутковъ, каждый изъ которыхъ равенъ одной десятой части предшествующаго. Дѣйствительно, если мы примемъ за единицу времени промежутокъ, въ теченіе котораго Ахиллесъ проходитъ стадію, то время, за которое онъ успѣетъ догнать черепаху, представится въ видѣ суммы

$$1 + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{100} + \tfrac{1}{1000} +$$

которая равна $1\frac{1}{9}$.

http://mathesis.ru

http://mathesis.ru

II отдѣлъ.

Задачи, относящіяся къ расположенію.

http://mathesis.ru

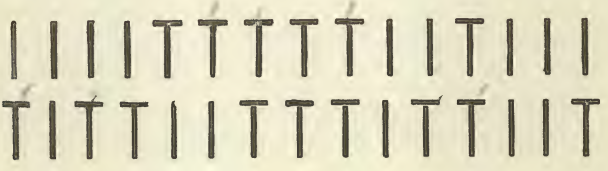
http://mathesis.ru

§ 18.

Задача о 15 христіанахъ и 15 туркахъ.

Баше далъ эту задачу во второмъ изданіи своей книги „Problèmes plaisants“ (Ліонъ, 1624) въ слѣдующей формѣ. „На одномъ суднѣ находились 15 христіанъ и 15 турокъ. Когда поднялась сильная буря и судно уже было обречено на гибель, то капитанъ разъяснилъ, что, если за бортъ будутъ брошены 15 человѣкъ изъ 30, находившихся на суднѣ, то можно будетъ спасти судно и жизнь прочихъ 15 человѣкъ. Желая послѣдовать этому совѣту, путешественники согласились, чтобы тѣ 15 человѣкъ, которымъ придется пожертвовать собой для спасенія другихъ, были отобраны слѣдующимъ образомъ. Всѣ 30 человѣкъ должны выстроиться въ рядъ, и затѣмъ слѣдуетъ считать отъ 1 до 9, повторяя этотъ счетъ нѣкоторое число разъ: всякій, на кого упадетъ число 9, долженъ быть брошенъ за бортъ. Счетъ производится такимъ образомъ, что за послѣднимъ человѣкомъ ряда ближайшимъ слѣдующимъ считается первый, и всякій разъ послѣ удаленія 9-го человѣка новый счетъ отъ 1 до 9 долженъ начинаться съ ближайшаго слѣдующаго въ ряду человѣка. Какія

мѣста должны занять 15 христіанъ, чтобы всѣ они могли остаться въ живыхъ, т. е. чтобы только 15 турокъ были выброшены за бортъ?“ Ту же задачу мы находимъ еще у Тартальи, жившаго въ первой половинѣ XVI столѣтія, а позже мы встрѣчаемъ ее въ различныхъ видоизмѣненіяхъ въ журналахъ съ отдѣломъ математическихъ развлеченій. Рѣшеніе легко найти путемъ испытанія: съ этой цѣлью беремъ 30 черточекъ, затѣмъ считаемъ пятнадцать разъ отъ 1 до 9, при чемъ какимъ-нибудь образомъ отмѣчаемъ черточку, на которую выпадетъ число 9, и наблюдаемъ затѣмъ, чтобы при дальнѣйшемъ счетѣ эти отмѣченныя черточки пропускались. Такимъ путемъ мы найдемъ слѣдующее рѣшеніе задачи:



т. е. 30 человѣкъ должны быть расположены въ такомъ порядкѣ:

4 христіанъ, 5 турокъ, 2 хр., 1 т., 3 хр., 1 т., 1 хр., 2 т., 2 хр., 3 т., 1 хр., 2 т., 2 хр., 1 т. Къ этому рѣшенію Баше присоединилъ также мнемотехническое средство въ видѣ стиха:

Mort, tu ne falliras pas
En me livrant le trépas!

http://rutracker.ru

Въ этомъ стихѣ нужно принимать во вниманіе лишь гласные звуки; послѣдовательность ихъ такова: o, u, e, a, i, a, a, e, e, i, a, e, e, a; вмѣсто a, какъ перваго гласнаго звука азбуки, нужно поставить 1, вмѣсто e — 2, вмѣсто i — 3, вмѣсто o — 4 и вмѣсто u — 5; тогда мы увидимъ, сколько турокъ и сколько христіанъ должны попеременно слѣдовать другъ за другомъ. Озанамъ (Ozanam) далъ латинскій стихъ который такимъ же образомъ даетъ рѣшеніе:

„Populeam virgam mater regina ferebat“.

Боллъ (Ball) далъ въ своей книгѣ „Recreations“ слѣдующій англійскій стихъ, дающій то же рѣшеніе:

„From numbers'aid and art
Never will fame depart“!

Нѣмецкое двустишіе, служащее для той же цѣли, гласитъ:

„Gott schlug den Mann in Amalek,
Den Israel bezwang!“

Тарталья, разбирая эту задачу, сообщаетъ рѣшенія ея также и для тѣхъ случаевъ, когда вмѣсто 9 берется какое-либо число отъ 3 до 12; всѣ соотвѣтствующія десять рѣшеній онъ облекаетъ въ форму италіанскихъ стиховъ; какъ и въ нашемъ примѣрѣ, нумера встрѣчающихся въ стихѣ гласныхъ звуковъ указываютъ, каковъ долженъ быть порядокъ чередованія въ соотвѣтствующемъ случаѣ.

Съ теченіемъ времени задача испытала нѣкоторыя несущественныя измѣненія. Въ собраніи зага-

докъ Фрейнда („Freunds Rätselschatz". Reklam, 1885) представлены два варіанта. Въ одномъ вмѣсто 30 потерпѣвшихъ крушеніе фигурируютъ 30 дезертировъ, изъ которыхъ 15 должны быть разстрѣляны и 15 — помилованы. Въ другомъ, вмѣсто 15 христіанъ и 15 турокъ, рѣчь идетъ о 16 бѣлыхъ и 16 неграхъ, которые тоже вмѣстѣ потерпѣли крушеніе: нужно пожертвовать 16-ью неграми, при чемъ на этотъ разъ за бортъ выбрасываютъ не каждаго девятаго, но каждаго десятаго. Если считать, что сущность задачи заключается лишь въ требованіи расположить n человѣкъ въ такомъ порядкѣ, чтобы, удаляя всякій разъ того, кто при отсчитываніи окажется d-ымъ по порядку, мы достигли того, чтобы остались нѣкоторыя заранѣе намѣченныя лица, то въ такомъ видѣ задачу можно встрѣтить еще задолго до Тартальи: мы найдемъ ее еще въ сочиненіи Гегезиппа (Hegesippus) „De bello Iudaico", а именно — въ главахъ 16—18 третьей книги. Тамъ разсказывается, что послѣ разрушенія Іерусалима знаменитый іудейскій писатель Іосифъ скрывался съ сорока другими іудеями въ одномъ подвалѣ; за исключеніемъ Іосифа и одного его друга, всѣ прочіе сами умертвили себя, при чемъ произошло это будто слѣдующимъ образомъ. Всѣ, кромѣ Іосифа и его друга, заявили, что они готовы скорѣе умереть, чѣмъ отдаться въ руки побѣдителей. Такъ какъ Іосифъ боялся слишкомъ открыто показать свое намѣреніе остаться въ

живыхъ, то онъ предложилъ, чтобы умерщвленіе совершилось въ нѣкоторомъ порядкѣ: всѣ должны были стать въ рядъ, и каждый третій по счету долженъ былъ убить себя; при этомъ счетѣ первый считается непосредственно слѣдующимъ за послѣднимъ. Предложеніе было принято. Іосифъ спасъ собственную жизнь и жизнь своего друга тѣмъ, что сталъ на 31-ое мѣсто и поставилъ друга на 16-ое, ибо, согласно принятому предложенію, всѣ остальные 39 человѣкъ изъ числа 41 убили себя раньше, чѣмъ Іосифъ и его другъ стали между собою считаться. Таковъ, повидимому, древнѣйшій варіантъ нашей задачи.

Хотя мы и очень часто встрѣчаемся съ этой задачей, ибо дѣти, приступая къ какой-нибудь игрѣ, рѣшаютъ вопросъ о томъ, кто изъ нихъ долженъ взять на себя особенную роль, не посредствомъ жребія, но съ помощью отсчитыванія, однако, математически эта задача не разрабатывалась, и лишь нѣсколько лѣтъ тому назадъ авторъ этой книги опубликовалъ математическое изслѣдованіе этой задачи въ „Naturwissenschaftliche Wochenschrift“ и въ „Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg“. Здѣсь мы изложимъ наиболѣе важные результаты этихъ математическихъ изслѣдованій.

Въ обобщенномъ видѣ задачу можно формулировать слѣдующимъ образомъ: „На окружности расположены n точекъ, которыя от-

мѣчены числами 1, 2, 3, ..., n — 1, n, при чемъ порядокъ счета соотвѣтствуетъ движенію по часовой стрѣлкѣ. Начиная съ точки 1, считаемъ всѣ точки по порядку до числа d; точку, на которую упадетъ число d, мы вычеркиваемъ. Съ точки, непосредственно слѣдующей по порядку за вычеркнутой, мы снова начинаемъ счетъ отъ 1 и продолжаемъ его попрежнему до d. Точка, на которую теперь выпадетъ число d, тоже вычеркивается; такъ мы продолжаемъ до тѣхъ поръ, пока не будутъ вычеркнуты всѣ точки, при чемъ не слѣдуетъ забывать, что вычеркнутыя точки слѣдуетъ пропускать при счетѣ. Нужно вычислить, каковъ номеръ первой вычеркнутой точки, каковъ номеръ второй вычеркнутой точки, вообще каковъ номеръ x—той точки, которая была вычеркнута въ e-тую очередь. Очевидно, что n, d, e суть положительныя числа. Число d можетъ быть равно n, менѣе или болѣе его; число же e, конечно, не можетъ превышать числа n. Если хотятъ найти, какая точка вычеркивается послѣдней, то нужно положить $e = n$.

Прежде всего легко понять, что, если $e = 1$, n не меньше d, а x означаетъ искомый номеръ вычеркиваемой точки, то $x = d$. Если попрежнему $e = 1$,

но $n < d$, то x равенъ остатку, который получается при дѣленіи d на n [13]). Это видно непосредственно изъ способа отсчитыванія. Такимъ образомъ мы нашли всѣ значенія x для случая $e=1$. Что касается значеній x въ случаѣ $e=2$, то они, какъ нашелъ авторъ, получаются изъ значеній x для случая $e=1$, если увеличить послѣднія на d. Когда полученная такимъ образомъ сумма больше, чѣмъ n, то слѣдуетъ вычесть изъ нея n одинъ или нѣсколько разъ, пока не получится число, которое не превышаетъ n. Однако, такимъ способомъ мы получимъ изъ числа, которое соотвѣтствуетъ случаю $e=1$, число, соотвѣтствующее случаю $e=2$, но относящееся къ числу точекъ, увеличенному на 1, т. е. къ группѣ изъ $n+1$ точекъ. Напримѣръ, для $d=3$, $e=1$, $n=3$ искомое число x равно 3. Изъ этого числа $x=3$ по прибавленіи къ нему d, т. е. въ нашемъ случаѣ числа 3, получается число, соотвѣтствующее случаю $d=3$, $e=2$, $n=4$; такъ какъ полученная сумма 6 больше четырехъ, то нужно вычесть изъ нея 4, и мы получимъ число 2. Это значитъ, что, если мы при четырехъ точкахъ будемъ считать постоянно отъ 1 до 3, то точка, вычеркнутая во вторую очередь, первоначально занимала второе мѣсто, что легко можно также повѣрить на опытѣ. Найденный авторомъ законъ о приведеніи чиселъ для случая $n+1$ и $e+1$ къ числамъ для случая n и e, математически можно формулировать слѣдующимъ обра-

зомъ. Функціональнымъ символомъ f мы выразимъ зависимость числа x отъ чиселъ n, d, e. Далѣе, черезъ $a \equiv r \pmod{n}$ мы выражаемъ ту мысль, что дѣленіе числа a на n даетъ остатокъ r, при чемъ r должно быть однимъ изъ чиселъ отъ 1 до n. Тогда нашъ законъ выражается слѣдующимъ образомъ:

$$d + f(n,\ d,\ e) \equiv f(n+1,\ d,\ e+1) \pmod{n+1}.$$

Въ видѣ примѣра мы приводимъ таблицы значеній x для $d=3$, $d=4$ и $d=9$. Такъ какъ намъ постоянно приходится лишь прибавлять d и либо вычитывать изъ суммы n или $2n$ и т. д., либо же вовсе оставлять сумму безъ перемѣны, то такія таблицы легко писать непосредственно, безъ вспомогательныхъ вычисленій. Послѣдовательные столбцы таблицы относятся къ различнымъ значеніямъ e, строки — къ различнымъ значеніямъ n. Числа, получающіяся отъ послѣдовательнаго прибавленія d, располагаются въ видѣ косыхъ столбцовъ, идущихъ сверху слѣва книзу направо. Замѣтимъ важное свойство этихъ таблицъ: n чиселъ, стоящихъ въ строкѣ, начинающейся съ опредѣленнаго значенія n, непремѣнно должны заключать въ себѣ всѣ числа отъ 1 до n, такъ что ни одно число не можетъ встрѣчаться дважды въ одной и той же горизонтальной строкѣ. Это обстоятельство можетъ служить важнымъ повѣрочнымъ средствомъ при постепенномъ вычисленіи таблицы.

Первая таблица:

d = 3

n	e = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	.
1	1												.
2	1	2											.
3	3	1	2										.
4	3	2	4	1									.
5	3	1	5	2	4								.
6	3	6	4	2	5	1							.
7	3	6	2	7	5	1	4						.
8	3	6	1	5	2	8	4	7					.
9	3	6	9	4	8	5	2	7	1				.
10	3	6	9	2	7	1	8	5	10	4			
11	3	6	9	1	5	10	4	11	8	2	7		.
12	3	6	9	12	4	8	1	7	2	11	5	10	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Если мы продолжимъ эту таблицу до n = 30, то послѣдняя строка дастъ намъ рѣшеніе нашей задачи въ ея первоначальной формѣ, въ которой n = 30, а e есть одно изъ чиселъ отъ 1 до 15. Мы тогда увидимъ также, въ какомъ порядкѣ 15 турокъ выбрасываются за бортъ. Дѣйствительно, если мы будемъ продолжать таблицу, то мы получимъ въ строкѣ, относящейся къ случаю n = 30, слѣдующія числа: 9, 18, 27, 6, 16, 26, 7, 19, 30, 12, 24, 8, 22, 5, 23, 11, 29, 17, 10, 2, 28, 25, 1, 4, 15, 13, 14, 3, 20, 21.

Вторая таблица:

d = 4.

n	e = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	1												
2	2	1											.
3	1	3	2										.
4	4	1	3	2									.
5	4	3	5	2	1								.
6	4	2	1	3	6	5							.
7	4	1	6	5	7	3	2						.
8	4	8	5	2	1	3	7	6					.
9	4	8	3	9	6	5	7	2	1				.
10	4	8	2	7	3	10	9	1	6	5			.
11	4	8	1	6	11	7	3	2	5	10	9		.
12	4	8	12	5	10	3	11	7	6	9	2	1	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

http://mathesis.ru

Третья таблица:
d = 9.

n	e = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	.
1	1																	.
2	1	2																.
3	3	1	2															.
4	1	4	2	3														.
5	4	5	3	1	2													.
6	3	1	2	6	4	5												.
7	2	5	3	4	1	6	7											.
8	1	3	6	4	5	2	7	8										.
9	9	1	3	6	4	5	2	7	8									.
10	9	8	10	2	5	3	4	1	6	7								.
11	9	7	6	8	11	3	1	2	10	4	5							.
12	9	6	4	3	5	8	12	10	11	7	1	2						.
13	9	5	2	13	12	1	4	8	6	7	3	10	11					.
14	9	4	14	11	8	7	10	13	3	1	2	12	5	6				.
15	9	3	13	8	5	2	1	4	7	12	10	11	6	14	15			.
16	9	2	12	6	1	14	11	10	13	16	5	3	4	15	7	8		.
17	9	1	11	4	15	10	6	3	2	5	8	14	12	13	7	16	17	.

Третья таблица рѣшаетъ всѣ вопросы, относящіеся къ случаю d = 9. Напримѣръ, предположимъ, что въ классѣ, состоящемъ изъ 14 учениковъ, дежурный назначается слѣдующимъ образомъ: выдѣляютъ каждый разъ девятаго, и послѣдній остающійся

получаетъ назначеніе; въ этомъ случаѣ дежурнымъ окажется шестой ученикъ, такъ какъ таблица даетъ намъ для случая $n = 14$ и $e = 14$ число 6.

Согласно только-что изложенному методу нахожденія чиселъ x, соотвѣтствующихъ даннымъ числамъ d, n, e, необходимо сперва найти числа x для всѣхъ значеній, меньшихъ n, и лишь потомъ возможно узнать числа x, относящіяся къ данному n. Спрашивается, не даетъ ли математика способа для непосредственнаго вычисленія числа $x = f(n, d, e)$, соотвѣтствующаго даннымъ n, d, e. Такое вычисленіе, дѣйствительно, оказывается возможнымъ. Чтобы сдѣлать понятнымъ рѣшеніе задачи о непосредственномъ нахожденіи числа x по даннымъ n, d, e, мы должны предварительно объяснить слѣдующее. Какъ извѣстно, геометрическимъ рядомъ (прогрессіей) называется рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое послѣдующее получается изъ непосредственно передъ нимъ стоящаго путемъ умноженія на одно и то же число, на такъ называемый знаменатель прогрессіи. Такъ, напримѣръ,

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32$$

есть геометрическій рядъ съ начальнымъ членомъ 1 и знаменателемъ прогрессіи, равнымъ 2. Далѣе, рядъ

$$16,\ 20,\ 25,\ 31\tfrac{1}{4},\ 39\tfrac{1}{16}$$

есть геометрическій рядъ съ начальнымъ членомъ 16 и знаменателемъ прогрессіи $\frac{5}{4}$. Если знаменатель

http://rcalculus.ru

представляетъ собой не цѣлое число, но дробь, то и члены ряда, начиная съ нѣкотораго болѣе или менѣе удаленнаго отъ начала члена, должны быть дробями, каковъ бы ни былъ первый членъ. Если мы всякій разъ, когда въ этомъ случаѣ получается дробь, будемъ замѣнять ее ближайшимъ бо́льшимъ цѣлымъ числомъ, и затѣмъ это послѣднее будемъ также умножать на знаменатель прогрессіи, чтобы получить слѣдующій членъ, то мы будемъ имѣть рядъ, состоящій исключительно изъ цѣлыхъ чиселъ; такой рядъ, который уже не есть точная геометрическая прогрессія, мы будемъ называть цѣлочисленнымъ рядомъ. Для большей ясности мы приведемъ нѣсколько такихъ рядовъ; пусть a обозначаетъ начальный членъ, q—постоянный знаменатель:

1. $a = 1$, $q = \frac{4}{3}$ даетъ: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 15, 20, 27, . . .
2. $a = 10$, $q = \frac{11}{10}$ даетъ: 10, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 24, 27, . .
3. $a = 25$, $q = \frac{6}{5}$ даетъ: 25, 30, 36, 44, 53, 64, 77, 93, . . .

Установивъ понятіе о цѣлочисленномъ рядѣ, мы можемъ слѣдующимъ образомъ представить полученное авторомъ рѣшеніе вопроса о непосредственномъ вычисленіи значенія $x = f(n, d, e)$ по даннымъ n, d, e:

„Вычитываемъ e изъ n, умножаемъ разность на d и къ произведенію прибавляемъ 1. Затѣмъ мы составляемъ цѣлочисленный рядъ, въ которомъ на-

http://mathesis.ru

чальный членъ равенъ полученной суммѣ, а знаменатель равенъ $\frac{d}{d-1}$. Далѣе мы находимъ наибольшій членъ этого ряда, не превышающій произведенія dn. Увеличенная на 1 разность между найденнымъ членомъ и указаннымъ произведеніемъ и даетъ намъ всегда искомый нумеръ мѣста x". Поясникъ сказанное примѣрами:

1. $d = 3$, $n = 14$, $e = 13$. Имѣемъ, слѣдовательно, 14 точекъ и считаемъ всякій разъ до 3; спрашивается, какая точка будетъ вычеркнута предпослѣднею. Начальный членъ равенъ $d(n - e) + 1 = 3 \cdot (14 - 13) + 1 = 4$. Постоянный знаменатель равенъ $\frac{d}{d-1} = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$; произведеніе dn, котораго не долженъ превышать выбираемый членъ цѣлочисленнаго ряда, равно $3 \cdot 14 = 42$. Итакъ, рядъ нашъ, начинающійся числами 4, 6, ..., нужно продолжать до тѣхъ поръ, пока не получимъ числа, превышающаго 42. Мы будемъ имѣть рядъ

4, 6, 9, 14, 21, 32, 48.

Такъ какъ 48 уже больше 42, то наибольшимъ членомъ, не превышающимъ произведенія dn, является число 32. Теперь мы находимъ $dn - 32 + 1 = 42 - 32 + 1 = 11$. Итакъ, 11-ая точка вычеркивается предпослѣднею. Этотъ же результатъ мы можемъ получить при помощи первой изъ нашихъ трехъ таблицъ, если мы продолжимъ въ ней косую

строку предпослѣднихъ чиселъ. Тамъ мы находимъ число 5 при $n = 12$ и $e = 11$; слѣдовательно, для $n = 13$ и $e = 12$ мы найдемъ число 8 и, наконецъ, для $n = 14$ и $e = 13$ получимъ число 11, что и подтверждаетъ полученный нами результатъ.

2. $d = 10$, $n = 8$. $e = 8$. Имѣемъ, слѣдовательно, на окружности 8 точекъ, считаемъ, начиная отъ первой точки, всякій разъ до 10, вычеркиваемъ каждую десятую точку и продолжаемъ этотъ процессъ, пока не вычеркнемъ всѣхъ точекъ, при чемъ вычеркиваемая точка уже не принимается въ счетъ. Спрашивается, которая изъ 8 точекъ будетъ вычеркнута послѣдней. Здѣсь начальный членъ $d(n - e) + 1$ равенъ 1, а постоянный знаменатель равенъ $\frac{d}{d - 1} = \frac{10}{9}$. Мы можемъ начать рядъ прямо съ 9, 10, ..., такъ какъ предшествующіе члены непремѣнно будутъ меньше 9. Такимъ образомъ мы получимъ:

9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 23, 26, 29, 33, 37,
42, 47, 53, 59, 66, 74, 83, ...

Произведеніе $dn = 80$. Поэтому мы должны взять членъ 74. Такъ какъ $80 - 74 + 1 = 7$, то седьмая точка вычеркивается послѣдней.

3. Возвращаясь къ задачѣ въ ея первоначальномъ видѣ, найдемъ, какое мѣсто занималъ турокъ, который былъ брошенъ за бортъ послѣднимъ. Здѣсь $d = 9$, $n = 30$, $e = 15$. Начальный членъ $d(n - e) + 1$

равенъ $9 . 15 + 1$ или 136; постоянный знаменатель равенъ $\frac{9}{8}$; произведеніе, котораго не долженъ превышать нужный намъ членъ ряда, равно 270. Имѣемъ рядъ:

136, 153, 173, 195, 220, 248, 279.

Итакъ, мы должны взять отсюда число 248; $270 - 248 + 1 = 23$; слѣдовательно, послѣдній турокъ, брошенный черезъ бортъ, занималъ 23-ье мѣсто; такой же результатъ даетъ рядъ чиселъ, который мы указали выше для случая $d = 9$ и $n = 30$.

4. Рѣшимъ еще вышеупомянутую задачу, помѣченную въ сборникѣ загадокъ Фрейнда номеромъ 269; здѣсь $n = 32$, $d = 10$ и e принимаетъ всѣ значенія отъ 1 до 16. Если мы обозначимъ черезъ x_1, x_2, x_3, . . ., x_{16} значенія x, соотвѣтствующія значеніямъ $e = 1, 2, 3, \ldots, 16$, то для нахожденія чиселъ x_1, x_2, . . ., x_{16} мы должны построить цѣлочисленные ряды, которые всѣ имѣютъ одинаковый знаменатель $\frac{10}{9}$ и соотвѣтственно слѣдующіе начальные члены:

311, 301, 291, 281, . . ., 161.

Произведеніе, котораго не должны превышать выбираемые члены рядовъ, здѣсь равно 320. Поэтому $x_1 = 1 + 320 - 311 = 10$, $x_2 = 1 + 320 - 301 = 20$, $x_3 = 1 + 320 - 291 = 30$; этотъ результатъ легко было получить непосредственно. Чтобы найти числа x_4, x_5, . . ., x_{16}, мы должны разсмотрѣть нижеслѣдующіе

цѣлочисленные ряды. Вычитывая послѣднія числа этихъ рядовъ всякій разъ изъ одного и того же числа $1 + 320$, мы получимъ значенія $x_4, x_5, \ldots x_{16}$.

281, 313	$x_4 = 321 - 313 = 8$
271, 302	$x_5 = 321 - 302 = 19$
261, 290	$x_6 = 321 - 290 = 31$
251, 279, 310	$x_7 = 321 - 310 = 11$
241, 268, 298	$x_8 = 321 - 298 = 23$
231, 257, 286, 318	$x_9 = 321 - 318 = 3$
221, 246, 274, 305	$x_{10} = 321 - 305 = 16$
211, 235, 262, 292	$x_{11} = 321 - 292 = 29$
201, 224, 249, 277, 308	$x_{12} = 321 - 308 = 13$
191, 213, 237, 264, 294	$x_{13} = 321 - 294 = 27$
181, 202, 225, 250, 278, 309	$x_{14} = 321 - 309 = 12$
171, 190, 212, 236, 263, 293	$x_{15} = 321 - 293 = 28$
161, 179, 199, 222, 247, 275, 306	$x_{16} = 321 - 306 = 15$.

Теперь мы можемъ представить положеніе бѣлыхъ и негровъ другъ относительно друга посредствомъ слѣдующей схемы, въ которой буквы б и н обозначаютъ соотвѣтственно мѣсто, занимаемое бѣлымъ и негромъ:

б б н б б б б н б н н н н б н н
б б н н б б н б б б н н н н н б.

Въ заключеніе замѣтимъ еще, что въ случаѣ $d = 2$ постоянный знаменатель ряда равенъ $r = 2$, такъ что мы получимъ настоящую геометрическую прогрессію; благодаря этому обстоятельству чрезвычайно облегчается вычисленіе того члена ряда, который нужно вычесть изъ числа $2n + 1$. Если $d = 2$,

http://mathesis.ru

и, кромѣ того, $e = n$, то приходится лишь вычесть изъ числа $2n + 1$ ближайшую меньшую степень числа 2. Если, напримѣръ, считаются 100 человѣкъ, при чемъ всякій разъ считаютъ только до двухъ, то для вычисленія нумера мѣста, занимаемаго тѣмъ, кто въ концѣ останется въ единственномъ числѣ, нужно вычесть изъ 201 ближайшую меньшую степень числа 2, т. е. 128. Такимъ образомъ мы найдемъ, что занимающій 73-ье мѣсто останется въ концѣ одинъ.

http://mathesis.ru

§ 19.

Магическіе квадраты.

А. Введеніе.

Первый магическій квадратъ, который мы встрѣчаемъ въ христіанскихъ западныхъ странахъ, приложенъ, какъ аттрибутъ, къ гравюрѣ Альбрехта Дюрера, которая называется „меланхолія“. Этотъ квадратъ имѣетъ слѣдующій видъ:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Такое расположеніе 16 чиселъ отъ 1 до 16 отличается замѣчательнымъ свойствомъ: будемъ ли мы складывать четыре числа любого изъ четырехъ горизонтальныхъ рядовъ, или же четыре числа любого изъ четырехъ вертикальныхъ рядовъ, или, наконецъ, четыре числа каждаго изъ двухъ діаго-

http://mathesis.ru

нальныхъ рядовъ, — мы во всѣхъ этихъ случаяхъ будемъ получать одну и ту же сумму 34. Вообще магическимъ квадратомъ называется квадратъ изъ $n \times n$ квадратныхъ полей, въ которыхъ $n \times n$ чиселъ,—чаще всего числа отъ 1 до $n \times n$,—расположены такимъ образомъ, что сумма n чиселъ въ каждомъ горизонтальномъ, въ каждомъ вертикальномъ и каждомъ діагональномъ ряду равна одному и тому же числу. Эта задача, относящаяся къ фигурѣ, имѣющей видъ шахматной доски, такъ же какъ и сама шахматная игра, вѣроятно, индусскаго происхожденія. Во всякомъ случаѣ эта задача была хорошо извѣстна арабамъ, къ которымъ она, вѣроятно, перешла отъ индусовъ. Благодаря арабамъ магическіе квадраты стали извѣстны въ Восточной Римской Имперіи. Наконецъ, со временъ Альбрехта Дюрера ученые Западной Европы тоже занялись методами полученія подобныхъ квадратовъ. Самый старый и простой магическій квадратъ содержитъ 9 чиселъ отъ 1 до 9, расположенныхъ въ квадратѣ такимъ образомъ, что сумма чиселъ каждаго горизонтальнаго, вертикальнаго и діагональнаго ряда равна одному и тому же числу 15. Этотъ квадратъ имѣетъ слѣдующій видъ.

http://mathesis.ru

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Здѣсь на самомъ дѣлѣ $6+1+8=7+5+3=2+9+4=6+7+2=1+5+9=8+3+4=6+5+4=8+5+2=15$. Легко доказать математически, что всѣ магическіе квадраты изъ чиселъ отъ 1 до 9 должны имѣть число 5 въ серединѣ, а четныя числа— въ четырехъ углахъ, такъ что возможны лишь 8 такихъ магическихъ квадратовъ; при этомъ любой изъ нихъ даетъ всѣ прочіе, если мы будемъ всевозможными способами вращать его или переворачивать. Изъ квадрата Дюрера съ числами отъ 1 до 16 можно получить еще множество другихъ магическихъ квадратовъ путемъ методическихъ перестановокъ. Самый простой способъ полученія магическаго квадрата съ числами отъ 1 до 16 состоитъ въ слѣдующемъ. Написавъ эти числа сперва въ ихъ натуральномъ порядкѣ, т. е. слѣдующимъ образомъ:

http://mathesis.ru

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

мы оставляемъ на занимаемыхъ ими мѣстахъ числа 1, 4, 13, 16 въ четырехъ угловыхъ клѣткахъ и числа 6, 7, 10, 11 въ четырехъ среднихъ клѣткахъ, но вмѣсто каждаго изъ прочихъ чиселъ пишемъ число, которое получается при вычитаніи этого числа изъ 17, а именно 15 вмѣсто 2, 14 вмѣсто 3, 12 вмѣсто 5, 9 вмѣсто 8, 5 вмѣсто 12, 3 вмѣсто 14 и 2 вмѣсто 15. Такимъ образомъ мы получимъ слѣдующій магическій квадратъ.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

http://mathesis.ru

Всѣ вертикальные ряды этого квадрата, равно какъ горизонтальные и діагональные, даютъ одну и ту же сумму 34. Къ этому свойству присоединяется еще замѣчательная особенность, состоящая въ томъ, что всякія четыре числа, расположенныя вокругъ средины въ видѣ квадрата или прямоугольника, даютъ въ суммѣ число 34,—напримѣръ, 1, 4, 13, 16, или 15, 14, 3, 2, или 12, 9, 8, 5, или 6, 7, 10, 11, или 15, 9, 8, 2, или 14, 12, 3, 5. Этотъ квадратъ получается изъ квадрата Дюрера, если переставить въ послѣднемъ два средніе вертикальные ряда одинъ на мѣсто другого.

B. Старые способы составленія магическихъ квадратовъ съ нечетнымъ числомъ клѣтокъ.

Уже въ древности были извѣстны правила для построенія магическихъ квадратовъ, содержащихъ болѣе, чѣмъ 3×3 и чѣмъ 4×4, клѣтокъ. Прежде всего можно легко вычислить сумму, которую должны давать числа каждаго ряда при данномъ числѣ клѣтокъ. Если числа отъ 1 до n^2 должны образовать магическій квадратъ и постоянная сумма чиселъ въ каждомъ ряду есть x, то сумма всѣхъ чиселъ отъ 1 до n^2 должна быть равна $x \cdot n$. Но, какъ извѣстно, для полученія суммы всѣхъ чиселъ отъ 1 до m, нужно m умножить на ближайшее слѣдующее число $m + 1$ и взять половину произведенія. Такимъ образомъ, $x \cdot n = \frac{1}{2} n^2 (n^2 + 1)$, или

$$x = \tfrac{1}{2} n (n^2 + 1).$$

http://rcin.org.pl

Отсюда слѣдуетъ, что $x = 15$, если $n = 3$; $x = 34$, если $n = 4$; $x = 65$, если $n = 5$; $x = 111$, если $n = 6$; $x = 175$, если $n = 7$; $x = 260$, если $n = 8$; $x = 369$, если $n = 9$; $x = 505$, если $n = 10$; $x = 671$, если $n = 11$, и т. д.

Дошедшее до насъ по преданію изъ Индіи правило для построенія магическихъ квадратовъ съ нечетнымъ числомъ клѣтокъ въ каждомъ ряду можно выразить слѣдующимъ образомъ:

„Слѣдуетъ написать число 1 въ срединѣ верхней строки и число 2 въ самой нижней клѣткѣ слѣдующаго справа столбца; затѣмъ дальнѣйшія числа слѣдуетъ писать въ ихъ натуральномъ порядкѣ въ направленіи діагонали вправо и кверху: по достиженіи праваго края слѣдуетъ продолжать съ лѣваго конца ближайшей выше лежащей строки, а по достиженіи верхняго края слѣдуетъ продолжать съ нижняго конца ближайшаго столбца, стоящаго рядомъ справа; встрѣтивши уже заполненную клѣтку, мы должны вмѣсто этой клѣтки заполнить ту, которая находится непосредственно подъ послѣднею заполненною“.

Такимъ образомъ составленъ, напримѣръ, слѣдующій магическій квадратъ изъ чиселъ отъ 1 до 7×7; сумма чиселъ каждаго ряда равна, какъ видимъ, 175.

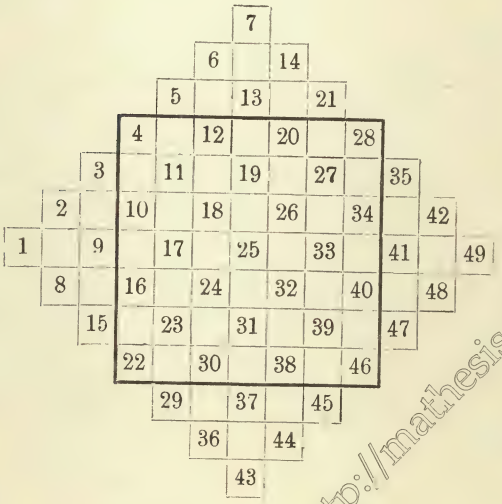
http://mathdb.ru

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Дальнѣйшимъ развитіемъ теоріи магическихъ квадратовъ и методовъ составленія ихъ мы обязаны византійцу Мошопулу (Moschopulos), жившему въ XIV столѣтіи, и затѣмъ еще знаменитому калькулятору Адаму Ризе и математику Михаилу Штифелю; послѣдніе оба жили въ срединѣ XVI столѣтія. Въ XVII столѣтіи магическими квадратами занимались Баше де Мезирьякъ и Аѳанасій Кирхеръ (Kircher). Наконецъ, около 1700 г. теорія магическихъ квадратовъ сдѣлала значительные успѣхи благодаря французскимъ математикамъ Делагиру (De la Hire) и Совёру (Sauveur). Въ новѣйшее время математики меньше занимались

магическими квадратами, какъ и вообще подобнаго рода математическими развлеченіями. Однако же въ 1882 г-нъ Шеффлеръ (Scheffler, въ Брауншвейгѣ) собралъ изслѣдованія о магическихъ квадратахъ, —какъ собственныя, такъ и другія,—въ особую книгу.

Среди различныхъ методовъ составленія магическихъ квадратовъ съ нечетнымъ числомъ клѣтокъ, кромѣ разобраннаго выше, такъ называемаго индусскаго метода, весьма извѣстенъ еще и слѣдующій методъ: Пишемъ числа въ ихъ натуральной послѣдовательности въ діагональномъ направленіи слѣдующимъ образомъ:



http://mathesis.ru

Заполнивъ такимъ образомъ 25 клѣтокъ квадрата, состоящаго изъ 49 клѣтокъ, мы, не мѣняя взаимнаго расположенія шести чиселъ, находящихся снаружи у каждой изъ четырехъ сторонъ квадрата, помѣщаемъ эти шесть чиселъ какъ разъ въ незаполненныхъ шести клѣткахъ квадрата, находящихся у противоположной стороны его. По этому способу Баше де Мезирьяка составленъ слѣдующій магическій квадратъ изъ чиселъ отъ 1 до 49.

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

С. Новые способы составленія квадратовъ съ нечетнымъ числомъ клѣтокъ.

Является вопросъ, нѣтъ ли болѣе общихъ методовъ составленія, которые по возможности давали

http://mathesis.ru

бы намъ всѣ магическіе квадраты съ даннымъ числомъ клѣтокъ. Делагиръ первый указалъ такой общій методъ составленія квадратовъ съ нечетнымъ числомъ клѣтокъ, а г-нъ Шеффлеръ усовершенствовалъ этотъ методъ въ своей книгѣ, о которой мы говорили выше. Чтобы познакомиться съ этимъ методомъ, мы сперва возьмемъ въ видѣ примѣра квадратъ изъ 5×5 клѣтокъ. Составимъ сначала два вспомогательныхъ квадрата. Въ первомъ напишемъ пять разъ числа отъ 1 до 5, во второмъ числа, кратныя 5, а именно: 0, 5, 10, 15, 20. Ясно, что сложеніе каждаго изъ чиселъ отъ 1 до 5 съ каждымъ изъ чиселъ 0, 5, 10, 15 и 20 даетъ всѣ 25 чиселъ отъ 1 до 25. Если q есть частное и r есть остатокъ отъ дѣленія на 5 положительнаго цѣлаго числа $a \leqq 25$, то $a = q \cdot 5 + r$, гдѣ $q \cdot 5$ есть одно изъ чиселъ 0. 5, 10, 20, а r есть одно изъ чиселъ 1, 2, 3, 4 (или 5, если будемъ допускать остатки, равные дѣлителю). Задача сводится теперь къ слѣдующему: нужно распредѣлить числа въ обоихъ вспомогательныхъ квадратахъ такимъ образомъ, чтобы при сложеніи чиселъ въ двухъ соотвѣтственныхъ клѣткахъ обоихъ квадратовъ дѣйствительно получалось каждое изъ чиселъ отъ 1 до 25 одинъ и только одинъ разъ и чтобы въ каждомъ горизонтальномъ, вертикальномъ и діагональномъ ряду каждаго изъ вспомогательныхъ квадратовъ находились всѣ пять чиселъ, соотвѣтствующихъ этому квадрату. Тогда сумма

чиселъ каждаго ряда въ квадратѣ окажется равной 65, потому что числа отъ 1 до 5 даютъ въ суммѣ 15, а сумма чиселъ 0, 5, 10, 15 и 20 равна 50. Чтобы получить указанное распредѣленіе чиселъ, мы представляемъ себѣ числа 1, 2, 3, 4, 5 (или 0, 5, 10, 15, 20) расположенными въ круговомъ порядкѣ, т. е. мы предполагаемъ, что за числомъ 5 слѣдуетъ 1, и пишемъ эти числа, начиная отъ какого-нибудь, либо по порядку, либо перескакивая постоянно черезъ одно или черезъ два и т. д. Такимъ путемъ мы получимъ циклы первыхъ четырехъ порядковъ. Напримѣръ, числа 3, 4, 5, 1, 2 составляютъ циклъ перваго порядка, числа 2, 4, 1, 3, 5—циклъ второго порядка, числа 4, 2, 5, 3, 1—циклъ третьяго порядка, 1, 5, 4, 3, 2—циклъ четвертаго порядка. Составляя оба вспомогательныхъ квадрата, мы должны прежде всего слѣдить за тѣмъ, чтобы во всѣхъ горизонтальныхъ рядахъ циклы были одного и того же порядка; то же самое должно имѣть мѣсто и въ вертикальныхъ рядахъ, но циклы горизонталей должны быть не такого порядка, какъ въ вертикаляхъ. Тогда остается лишь размѣстить числа такъ, чтобы къ одинаковымъ числамъ одного вспомогательнаго квадрата въ другомъ были о т н е с е н ы (т. е. занимали соотвѣтственныя клѣтки) не одинаковыя, но р а з л и ч н ы я числа. Можно, напримѣръ, составить два слѣдующихъ вспомогательныхъ квадрата:

http://mathus.ru

2	4	1	3	5
1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1

и

15	20	0	5	10
5	10	15	20	0
20	0	5	10	15
10	15	20	0	5
0	5	10	15	20

Складывая попарно всѣ числа, написанныя въ одинаково расположенныхъ клѣткахъ обоихъ квадратовъ, мы получимъ слѣдующій магическій квадратъ изъ чиселъ отъ 1 до 25.

17	24	1	8	15
6	13	20	22	4
25	2	9	11	18
14	16	23	5	7
3	10	12	19	21

Понятно, что такимъ образомъ можно составить очень много магическихъ квадратовъ съ 5×5 клѣтками: нужно лишь заполнить клѣтки обоихъ вспомогательныхъ квадратовъ всевозможными способами, удовлетворяющими указаннымъ требованіямъ. Составленные такимъ образомъ квадраты имѣютъ еще то особенное свойство, что каждыя пять чиселъ, заполняющихъ два ряда, которые расположены па-

раллельно одной изъ діагоналей съ различныхъ сторонъ ея, также даютъ въ суммѣ число 65,—напримѣръ, 3 и 24, 20, 11, 7; или 1, 22, 18 и 14, 10. Итакъ, сумма 65 встрѣчается въ такомъ квадратѣ въ общемъ 20 разъ: въ пяти горизонтальныхъ и пяти вертикальныхъ рядахъ, въ двухъ діагональныхъ рядахъ и, наконецъ, въ восьми (т. е. дважды четырехъ) парахъ рядовъ, параллельныхъ діагоналямъ. Г-нъ Шеффлеръ доказалъ, что обратно, всякій магическій квадратъ, удовлетворяющій всѣмъ этимъ условіямъ, можетъ быть составленъ указаннымъ образомъ изъ двухъ вспомогательныхъ квадратовъ. Въ связи съ той особенностью, что сумма всякихъ пяти чиселъ, заполняющихъ два ряда, параллельныхъ діагонали, также равна 65, находится еще и слѣдующее свойство этихъ же магическихъ квадратовъ: если мы рядомъ съ такимъ квадратомъ съ боковъ, сверху и снизу, будемъ снова повторно писать этотъ же квадратъ, то любой квадратъ изъ 5×5 клѣтокъ, произвольно выдѣленный нами, тоже представляетъ собой правильный магическій квадратъ. Напримѣръ, если мы продолжимъ предыдущій магическій квадратъ вправо и внизъ, то мы получимъ слѣдующую фигуру:

http://mathesis.ru

17	24	1	8	15	17	24	1	8	15	17	. .
6	13	20	22	4	6	13	20	22	4	6	. .
25	2	9	11	18	25	2	9	11	18	25	.
14	16	23	5	7	14	16	23	5	7	14	. .
3	10	12	19	21	3	10	12	19	21	3	. .
17	24	1	8	15	17	24	1	8	15	17	. .
6	13	20	22	4	6	13	20	22	4	6	. .
25	2	9	11	18	25	2	9	11	18	25	. .
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	.	. .	. .	.	. .

Каждый квадратъ изъ 5×5 клѣтокъ (напримѣръ, оба жирно окаймленные квадрата) обладаетъ тѣми же магическими свойствами, а именно: постоянная сумма 65 получается въ немъ 4×5 способами.

Тотъ же самый способъ, съ помощью котораго мы только-что составили магическіе квадраты изъ 5×5 клѣтокъ, легко даетъ намъ и квадраты изъ $n \times n$ клѣтокъ, гдѣ n есть какое-нибудь нечетное число, большее 5. Въ видѣ примѣра съ сравнительно большимъ числомъ n мы прилагаемъ здѣсь квадратъ съ 11×11 клѣтками, составленный по общему методу Делагира изъ двухъ вспомогательныхъ квадратовъ. Въ первомъ вспомогательномъ квадратѣ вмѣсто чиселъ 1, 2, 3, 4, 5 нужно взять, конечно, числа отъ 1 до 11. Во второмъ вспомогательномъ квадратѣ пишутъ числа 0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110.

http://mathesis.ru

Первый вспомогательный квадратъ.

1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10
2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	11
3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1
4	0	8	10	1	3	5	7	9	11	2
5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3
6	8	10	1	3	5	7	9	11	2	4
7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5
8	10	1	3	5	7	9	11	2	4	6
9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7
10	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8
11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9

http://mathesis.ru

Второй вспомогательный квадратъ.

0	33	66	99	11	44	77	110	22	55	88
11	44	77	110	22	55	88	0	33	66	99
22	55	88	0	33	66	99	11	44	77	110
33	66	99	11	44	77	110	22	55	88	0
44	77	110	22	55	88	0	33	66	99	11
55	88	0	33	66	99	11	44	77	110	22
66	99	11	44	77	110	22	55	88	0	33
77	110	22	55	88	0	33	66	99	11	44
88	0	33	66	99	11	44	77	110	22	55
99	11	44	77	110	22	55	88	0	33	66
110	22	55	88	0	33	66	99	11	44	77

http://mathesis.ru

Результирующій квадратъ.

1	36	71	106	20	55	79	114	28	63	98
13	48	83	118	32	56	91	5	40	75	110
25	60	95	9	44	68	103	17	52	87	111
37	72	107	21	45	80	115	29	64	99	2
49	84	119	33	57	92	6	41	76	100	14
61	96	10	34	69	104	18	53	88	112	26
73	108	22	46	81	116	30	65	89	3	38
85	120	23	58	93	7	42	77	101	15	50
97	11	35	70	105	19	54	78	113	27	62
109	12	47	82	117	31	66	90	4	39	74
121	5	98	94	24	43	67	102	16	51	86

D. Квадраты съ четнымъ числомъ клѣтокъ.

До сихъ поръ мы познакомились всего лишь съ однимъ квадратомъ, имѣющимъ четное число клѣтокъ,—съ квадратомъ съ 4×4 клѣтками. Для составленія подобныхъ квадратовъ съ большимъ числомъ клѣтокъ служатъ особые методы, болѣе сложные, чѣмъ въ случаѣ нечетнаго числа клѣтокъ. Но и здѣсь, какъ и при составленіи квадрата съ 4×4 клѣтками, мы исходимъ изъ натуральнаго ряда чиселъ и затѣмъ вмѣсто нѣкоторыхъ чиселъ беремъ дополненія ихъ до опредѣленнаго числа

(напримѣръ, въ квадратѣ съ 4×4 клѣтками это число есть 17), а другія числа подвергаемъ перестановкамъ. Напримѣръ, чтобы составить магическій квадратъ съ 6×6 клѣтками, слѣдуетъ размѣстить въ 12 діагональныхъ клѣткахъ тѣ числа, которыя находились бы тамъ, если бы мы размѣстили въ квадратѣ всѣ 36 чиселъ въ натуральномъ порядкѣ; затѣмъ вмѣсто чиселъ, соотвѣтствующихъ прочимъ клѣткамъ, беремъ дополненія ихъ до 37 и, наконецъ, дѣлаемъ 6 перестановокъ. Какія именно перестановки паръ чиселъ, стоящихъ въ симметричныхъ клѣткахъ, необходимо сдѣлать для полученія постоянной суммы во всѣхъ рядахъ въ случаѣ совершенно произвольнаго четнаго числа клѣтокъ,—это легче узнать эмпирическимъ путемъ, чѣмъ при помощи весьма сложнаго правила, которое указалъ Делагиръ. Мы поэтому прилагаемъ здѣсь магическіе квадраты съ 6×6, 8×8 и 10×10 клѣтками. Во всѣхъ этихъ примѣрахъ въ діагоналяхъ стоятъ числа, которыя должны были бы тамъ находиться, если бы всѣ числа были размѣщены въ квадратѣ въ натуральномъ порядкѣ. Въ прочихъ клѣткахъ нужно написать дополненія соотвѣтствующихъ чиселъ до $4n^2 + 1$, предполагая, что квадратъ содержитъ $2n \cdot 2n$ клѣтокъ. Затѣмъ нужно сдѣлать перестановки; изъ разсмотрѣнія прилагаемыхъ квадратовъ легко узнать, каковы должны быть эти перестановки.

http://rutracks.ru

6×6 клѣтокъ.

1	35	34	3	32	6
31	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

8×8 клѣтокъ.

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

Замѣтимъ, что, хотя въ составленныхъ такимъ путемъ магическихъ квадратахъ съ четнымъ чи-

http://rusthesis.ru

сломъ клѣтокъ числа въ обѣихъ діагоналяхъ и даютъ требуемую сумму, но этого нельзя уже сказать о какихъ-нибудь двухъ рядахъ съ 2n клѣтками, лежащихъ параллельно діагонали по обѣимъ сторонамъ ея. Оказывается даже, что при четномъ числѣ клѣтокъ вообще невозможно удовлетворить условію, чтобы два ряда, параллельные діагонали, тоже давали постоянную сумму.

10×10 клѣтокъ.

1	99	3	97	96	5	94	8	92	10
90	12	88	14	86	85	17	83	19	11
80	79	23	77	25	26	74	28	22	71
31	69	68	34	66	65	37	33	62	40
60	42	58	57	45	46	44	53	49	51
50	52	43	47	55	56	54	48	59	41
61	32	38	64	36	35	67	63	39	70
21	29	73	27	75	76	24	78	72	30
20	82	18	84	15	16	87	13	89	81
91	9	93	4	6	95	7	98	2	100

http://mathesis.ru

Кромѣ изложеннаго закона составленія квадратовъ съ четнымъ числомъ клѣтокъ, есть еще и другіе законы, которые тоже даютъ правильные магическіе квадраты, но разсмотрѣніе этихъ законовъ заняло бы у насъ слишкомъ много мѣста. Число всевозможныхъ магическихъ квадратовъ при данномъ числѣ клѣтокъ оказывается весьма большимъ. Высчитали, напримѣръ, что при 4×4 клѣткахъ возможны 880 магическихъ квадратовъ, при 6×6 же клѣткахъ число магическихъ квадратовъ доходитъ уже до многихъ милліоновъ. Число магическихъ квадратовъ съ нечетнымъ числомъ клѣтокъ, которые получаются по методу Делагира, тоже весьма быстро возрастаетъ. Напримѣръ, число магическихъ квадратовъ съ 7×7 клѣтками достигаетъ 363 милліоновъ и 916 800.

Можно поставить вопросъ, нельзя ли примѣнить и къ случаю четнаго числа клѣтокъ методъ полученія магическихъ квадратовъ, основанный на составленіи двухъ вспомогательныхъ квадратовъ. Оказывается, что при $2n = 4$ можно, дѣйствительно, составить два вспомогательныхъ квадрата такимъ образомъ, чтобы въ каждомъ ряду одного находились числа 1, 2, 3, 4, а въ каждомъ ряду другого—числа 0, 4, 8, 12, и чтобы всѣ пары одинаково расположенныхъ клѣтокъ содержали различныя между собой сочетанія одного изъ чиселъ 1, 2, 3, 4 съ однимъ изъ чиселъ 0, 4, 8 и 12. Этими свойствами отличаются оба слѣ-

дующіе вспомогательные квадрата, при помощи которыхъ составленъ находящійся подъ ними магическій квадратъ.

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

и

0	4	8	12
8	12	0	4
12	8	4	0
4	0	12	8

даютъ:

1	6	11	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	4	13	10

Существованіемъ такихъ двухъ вспомогательныхъ квадратовъ можно воспользоваться для одной интересной группировки картъ. Условимся относить числа 1, 2, 3, 4 соотвѣтственно къ тузу, валету, дамѣ и королю, а числа 0, 4, 8, 12 отнесемъ соотвѣтственно къ мастямъ „бубны“, „черви“, „пики“ и „трефи“; при такомъ условіи сліяніе обоихъ вспомогательныхъ квадратовъ въ одинъ единственный соотвѣтствуетъ расположенію 4 тузовъ, 4 валетовъ, 4 дамъ и 4 королей въ видѣ квадрата, въ которомъ каждый горизонтальный, вертикальный и діагональный рядъ содержитъ по одному и только по

одному представителю отъ каждой изъ четырехъ фигуръ и четырехъ мастей. Это видно изъ слѣдующей фигуры, въ которой буквы Б, Ч, П, Т обозначаютъ соотвѣтственно масти бубны, черви, пики и трефи, а приставленныя къ нимъ указатели 1, 2, 3 и 4 относятся соотвѣтственно къ фигурамъ—тузъ, валетъ, дама и король:

$Б_1$	$Ч_2$	$П_3$	$Т_4$
$П_4$	$Т_3$	$Б_2$	$Ч_1$
$Т_2$	$П_1$	$Ч_4$	$Б_3$
$Ч_3$	$Б_4$	$Т_1$	$П_2$

Если мы попытаемся составить два такихъ вспомогательныхъ квадрата для случая $2n = 6$, то окажется, что легко распредѣлить надлежащимъ образомъ въ одномъ квадратѣ числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, а въ другомъ квадратѣ — числа 0, 6, 12, 18, 24, 30, но никакъ не удается вписать въ 36 одинаково расположенныхъ клѣткахъ всевозможныя парныя соединенія чиселъ 1, 2, 3, 4, 5, 6 съ числами 0, 6, 12, 18, 24, 30. Напротивъ, для всякаго четнаго числа клѣтокъ, превышающаго 6, можно составить вспомогательные квадраты, которые обладаютъ всѣми свойствами, необходимыми для того, чтобы изъ этихъ

двухъ квадратовъ можно было получить магическій квадратъ. Но эти вспомогательные квадраты получаются гораздо труднѣе, чѣмъ въ случаѣ нечетнаго числа клѣтокъ: составить такую пару квадратовъ представляется очень утомительнымъ и удается лишь послѣ многихъ испытаній. Автору этой книги удалось составить подобныя пары вспомогательныхъ квадратовъ для случая $2n = 8$. Каждая такая пара представляетъ собой рѣшеніе слѣдующей задачи: написать въ 64 клѣткахъ шахматной доски 64 сочетанія восьми чиселъ отъ 1 до 8 съ восемью буквами отъ a до h такимъ образомъ, чтобы всѣ 8 рядовъ слѣва направо, всѣ 8 рядовъ сверху внизъ и обѣ діагонали заключали въ себѣ по одному и только по одному разу каждое изъ 8 чиселъ и каждую изъ 8 буквъ. Эта задача рѣшается слѣдующей фигурой:

1a	2b	3c	4d	5e	6f	7g	8h
5h	6g	7f	8e	1d	2c	3b	4a
4f	3e	2h	1g	8b	7a	6d	5c
8c	7d	6a	5b	4g	3h	2e	1f
7b	8a	5d	6c	3f	4e	1h	2g
3g	4h	1e	2f	7c	8d	5a	6b
6e	5f	8g	7h	2a	1b	4c	3d
2d	1c	4b	3a	6h	5g	8f	7e

http://mathesis.ru

E. Магическіе квадраты съ числами года.

До сихъ поръ мы говорили только о такихъ магическихъ квадратахъ, которые содержатъ n^2 чиселъ отъ 1 до n^2. Можно, конечно, поставить себѣ задачу написать въ клѣткахъ какія-нибудь другія n^2 чиселъ; но такія числа должны, разумѣется, находиться въ какой-нибудь связи другъ съ другомъ. Напримѣръ, если вмѣсто чиселъ отъ 1 до n^2 возьмемъ степени отъ a^1 до a^{n^2}, то мы получимъ магическій квадратъ, въ которомъ постоянную величину имѣетъ не сумма, но произведеніе всѣхъ чиселъ каждаго ряда. Слѣдующій квадратъ полученъ такимъ способомъ изъ магическаго квадрата съ 3×3 клѣтками, при чемъ $a = 2$.

64	2	256
128	32	8
4	512	16

Здѣсь всѣ ряды даютъ одинаковое произведеніе $2^{15} = 32768$. Еще болѣе простой способъ заключается въ томъ, что къ каждому числу обыкновеннаго магическаго квадрата прибавляется одно и то же число b. Въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть въ квадратѣ всѣ цѣлыя числа отъ $b + 1$ до $b + n^2$.

При этомъ легко устроить, чтобы сумма во всѣхъ рядахъ была равна напередъ заданному числу, почему-либо интересующему насъ,—напримѣръ, числу какого-нибудь года. Число n клѣтокъ, прилегающихъ къ каждой сторонѣ квадрата, прибавляемое число b и сумма s, которую мы желаемъ имѣть, связаны между собой уравненіемъ, которое легко можно составить. Выше мы показали, что въ обыкновенномъ магическомъ квадратѣ сумма чиселъ въ каждомъ ряду должна быть равна $\frac{1}{2}n(n^2+1)$. Но въ данномъ случаѣ въ каждомъ ряду сумма увеличена на $n.b$; поэтому

$$s = \tfrac{1}{2}n(n^2+1) + nb.$$

Отсюда слѣдуетъ, что, если число n нечетное, то оно должно быть дѣлителемъ числа s. Если n число четное вида $2^{\alpha}.m$ (m — нечетное число), то оказывается, что число s должно имѣть дѣлителя m и дѣлителя $2^{\alpha-1}$. Такъ какъ число 1897 дѣлится на 7, то возможны магическіе квадраты съ 7×7 клѣтками, дающіе во всѣхъ своихъ рядахъ сумму 1897. Далѣе, такъ какъ 1898 дѣлится на 13, то возможны магическіе квадраты съ 13×13 клѣтками, дающіе вездѣ сумму 1898. Чтобы получить квадратъ съ постоянной суммой 1897, придется прибавить къ каждому числу обыкновеннаго магическаго квадрата съ 49 клѣтками число 246. Для полученія же квадрата съ постоянной суммой 1898 необходимо прибавить

къ каждому числу обыкновеннаго магическаго квадрата съ 169 клѣтками число 61. Мы прилагаемъ здѣсь подобные магическіе квадраты, относящіеся къ числамъ 1897-ого и 1898-ого годовъ.

Постоянная сумма 1897.

250	275	258	283	266	291	274
281	257	282	265	290	273	249
256	288	264	289	272	248	280
287	263	295	271	247	279	255
262	294	270	253	278	254	286
293	269	252	277	260	285	261
268	252	276	259	284	267	292

http://mathesis.ru

Постоянная сумма 1898.

68	153	82	167	96	181	110	195	124	209	138	223	152
165	81	166	95	180	109	194	123	208	137	222	151	67
80	178	94	179	108	193	122	207	136	221	150	66	164
177	93	191	107	192	121	206	135	220	149	65	163	79
92	190	106	204	120	205	134	219	148	64	162	78	176
189	105	203	119	217	133	218	147	63	161	77	175	91
104	202	118	216	132	230	146	62	160	76	174	90	188
201	117	215	131	229	145	74	159	75	173	89	187	103
116	214	130	228	144	73	158	87	172	88	186	102	200
213	129	227	143	72	157	86	171	100	185	101	199	115
128	226	142	71	156	85	170	99	184	113	198	114	212
225	141	70	155	84	169	98	183	112	197	126	211	127
140	69	154	83	168	97	182	111	196	125	210	139	224

F. Магическіе квадраты, находящіеся одинъ въ другомъ.

Остроуміе и терпѣніе привели математиковъ еще къ магическимъ квадратамъ, обладающимъ тѣмъ свойствомъ, что, если отнимать отъ нихъ послѣдовательно по четыре лежащихъ съ края ряда, то остающійся всякій разъ меньшій квадратъ тоже оказывается магическимъ, т. е. всѣ ряды его даютъ одну и ту же сумму. Ограничимся здѣсь двумя примѣрами такихъ квадратовъ съ 7×7 и съ 8×8 клѣтками. Числа внутри каждой черной рамки на

прилагаемой фигурѣ образуютъ квадраты, въ которыхъ всѣ горизонтальные, вертикальные и діагональные ряды даютъ одну и ту же сумму.

40	1	2	3	42	41	46
38	31	13	14	32	35	12
39	30	26	21	28	20	11
43	33	27	25	23	17	7
6	16	22	29	24	34	44
5	15	37	36	18	19	45
4	49	48	47	8	9	10

Въ первомъ изъ двухъ прилагаемыхъ квадратовъ внутренній меньшій квадратъ съ 3×3 клѣтками даетъ постоянную сумму 75 и содержитъ числа отъ 21 до 29. Слѣдующій квадратъ, заключающій въ себѣ предыдущій, состоитъ изъ 25 клѣтокъ съ числами отъ 13 до 37 и даетъ сумму 125; весь же квадратъ даетъ сумму 175. Во второмъ примѣрѣ мы имѣемъ внутри квадратъ съ числами отъ 25 до 40, при чемъ сумма равна 130; затѣмъ слѣдуетъ охватывающій его квадратъ съ числами отъ 15 до 50 и суммой 195; наконецъ, этотъ второй

квадратъ образуетъ середину обыкновеннаго магическаго квадрата съ числами отъ 1 до 64 и суммой 260.

1	63	62	4	5	59	58	8
56	15	49	48	44	19	20	9
55	47	25	28	39	38	18	10
11	22	40	37	26	27	43	54
53	42	34	35	32	29	23	12
13	24	31	30	33	36	41	52
14	45	16	17	21	46	50	51
57	2	3	61	60	6	7	64

G. Магическіе квадраты съ магическими частями.

Проведя въ квадратѣ съ 8×8 клѣтками обѣ среднія линіи, параллельныя сторонамъ, мы разложимъ его на четыре части по 4×4 клѣтокъ въ каждой; мы можемъ затѣмъ поставить себѣ задачу размѣстить числа отъ 1 до 64 такимъ образомъ, чтобы не только весь квадратъ былъ магическимъ, но чтобы и каждая изъ его четырехъ частей обладала магическими свойствами, т. е. чтобы всѣ горизонтальные, вертикальные и діагональные ряды да-

http://rutube.ru

вали одинаковую сумму. Слѣдующій примѣръ представляетъ собой рѣшеніе этой задачи:

58	7	29	36	54	11	17	48
59	6	32	33	55	10	20	45
8	57	35	30	12	53	47	18
5	60	34	31	9	56	46	19
62	3	21	44	50	15	25	40
63	2	24	41	51	14	28	37
4	61	43	22	16	49	39	26
1	64	42	23	13	52	38	27

Составимъ магическій квадратъ изъ 3×3 клѣтокъ съ числами I до IX и замѣнимъ каждое изъ этихъ чиселъ новымъ магическимъ квадратомъ изъ 3×3 клѣтокъ, при чемъ въ квадратѣ I мы напишемъ въ магическомъ порядкѣ числа отъ 1 до 9, въ квадратѣ II — числа отъ 10 до 18 и т. д.; тогда мы получимъ квадратъ изъ 9×9 клѣтокъ, который, представляетъ собой, въ цѣломъ, магическій квадратъ и, кромѣ того, состоитъ изъ девяти квадратовъ, которые всѣ, въ свою очередь, тоже являются

http://mybook.ru

магическими квадратами. Полученный квадратъ имѣетъ слѣдующій видъ:

11	18	13	74	81	76	29	36	31
16	14	12	79	77	75	34	32	30
15	10	17	78	73	80	33	28	35
56	63	58	38	45	40	20	27	22
61	59	57	43	41	39	25	23	21
60	55	62	42	37	44	24	19	26
47	54	49	2	9	4	65	72	67
52	50	48	7	5	3	70	68	66
51	46	53	6	1	8	69	64	71

Н. Магическіе многоугольники.

Во всѣхъ изложенныхъ нами до сихъ поръ обобщеніяхъ задачи о магическихъ квадратахъ неизмѣнно сохранялась геометрическая фигура квадрата. Можно, однако, расширить нашу задачу и въ другомъ направленіи, а именно — замѣнить квадратъ прямоугольникомъ или многоугольникомъ съ произвольно большимъ числомъ сторонъ. Мы не будемъ входить въ подробности методовъ составленія маги-

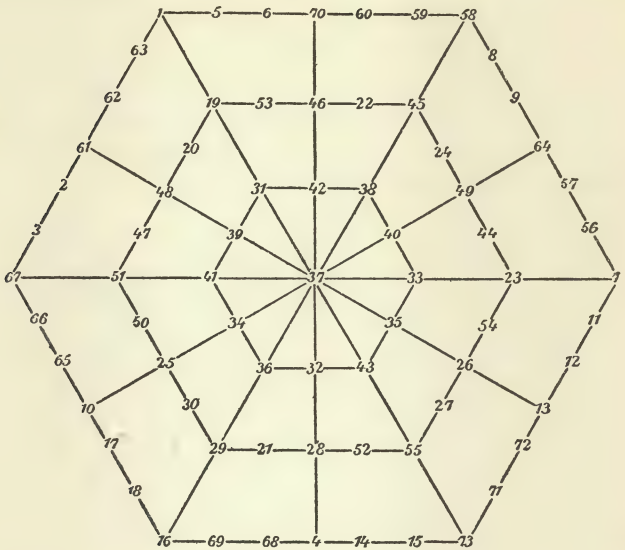
ческихъ многоугольниковъ, но дадимъ лишь два примѣра, которые мы заимствуемъ изъ книги г. Шеффлера.

1. Числа отъ 1 до 32 можно написать въ прямоугольникѣ, состоящемъ изъ 8 рядовъ по 4 числа въ каждомъ такъ, чтобы длинныя ряды давали въ суммѣ 132, а короткіе — 66; этотъ прямоугольникъ имѣетъ слѣдующій видъ:

17	15	14	5	4	22	23	32
8	26	6	13	21	3	31	24
25	7	27	20	12	30	2	9
16	18	19	28	29	11	10	1

2. Числа отъ 1 до 73 можно расположить въ видѣ трехъ шестиугольниковъ, въ общемъ центрѣ которыхъ находится число 37; каждая сторона этихъ шестиугольниковъ содержитъ соотвѣтственно по 3, 5 и 7 чиселъ; не только шесть сторонъ каждаго многоугольника, но и три діаметра, соединяющіе противоположныя вершины, а также три перпендикуляра черезъ середины противоположныхъ сторонъ даютъ одну и ту же сумму, которая въ самомъ внутреннемъ многоугольникѣ равна 111, въ слѣдую-

щемъ 185 и, наконецъ, въ наружномъ — 259. (Ср. прилагаемую фигуру):



J. Магическіе кубы.

Нѣкоторые изслѣдователи, въ особенности Кохансkій (1686), Соверъ (1710), Гюгель (Hugel, 1859) и Шеффлеръ (1882), расширили идею магическихъ квадратовъ, перенеся ее изъ плоскости въ пространство. Мысленно проведемъ въ кубѣ рядъ плоскостей, параллельныхъ гранямъ его, на равномъ разстояніи другъ отъ друга: онѣ раздѣлятъ кубъ на ячейки, которыя всѣ имѣютъ форму кубиковъ. Предполо-

жимъ, что мы поставили себѣ задачу размѣстить по этимъ кубикамъ числа натуральнаго ряда такимъ образомъ, чтобы всѣ ряды слѣва направо, спереди назадъ и сверху внизъ, а также всѣ діагонали квадратовъ и проходящія черезъ центръ куба главныя діагонали, содержали числа, имѣющія одинаковую сумму. Если число клѣтокъ равно $3 \times 3 \times 3$, то построить такой магическій кубъ оказывается невозможнымъ. Въ случаѣ $4 \times 4 \times 4$ клѣтокъ можно достигнуть того, чтобы всѣ ряды, параллельные ребрамъ куба, и всѣ главныя діагонали давали постоянную сумму 130. Чтобы представить магическій кубъ изъ 64 клѣтокъ въ плоскости бумаги, вообразимъ, что числа, соотвѣтствующія 64 кубикамъ, написаны на каждомъ изъ нихъ сверху, и будемъ мысленно снимать съ куба слоями, начиная сверху, по 16 чиселъ. Тогда мы получимъ четыре квадрата по 16 клѣтокъ въ каждомъ; совокупность этихъ квадратовъ представитъ намъ магическій кубъ, какъ можно видѣть изъ слѣдующаго примѣра:

Первый слой сверху.

1	48	32	49
60	21	37	12
56	25	41	8
13	36	20	61

Второй слой сверху.

63	18	34	15
6	43	27	54
10	39	23	58
51	30	46	3

http://mathesis.ru

Третій слой сверху.

62	19	35	14
7	42	26	55
11	38	22	59
50	31	47	2

Нижній слой.

4	45	29	52
57	24	40	9
53	28	44	5
16	33	17	64

Постоянная сумма 130 встрѣчается здѣсь всего 52 раза: 16 разъ въ рядахъ слѣва направо, 16 разъ въ рядахъ сверху внизъ, 16 разъ въ рядахъ спереди назадъ и, наконецъ, 4 раза въ рядахъ, соединяющихъ противоположныя вершины куба. Діагонали же 12 квадратовъ, параллельныхъ гранямъ куба, не даютъ этой суммы.

Въ кубѣ изъ $5 \times 5 \times 5$ клѣтокъ можно уже расположить числа такъ, чтобы всѣ 75 рядовъ, параллельные ребрамъ, и всѣ 30 рядовъ, лежащіе на діагоналяхъ квадратовъ, а также 4 ряда, образующіе главные діагонали, давали одну и ту же сумму, а именно $\frac{1}{2}n(n^3+1) = 315$. Подобно тому, какъ магическіе квадраты съ нечетнымъ числомъ клѣтокъ могутъ быть составлены изъ двухъ вспомогательныхъ квадратовъ, такъ и магическіе кубы можно составить изъ трехъ вспомогательныхъ кубовъ. Такимъ способомъ составленъ слѣдующій магическій кубъ съ $5 \times 5 \times 5$ клѣтками, въ которомъ среднее ариѳметическое чиселъ 1 и 125, а именно число 63,

Первый слой.

121	27	83	14	70
10	61	117	48	79
44	100	1	57	113
53	109	40	91	22
87	18	74	105	31

Второй слой.

2	58	114	45	96
36	92	23	54	110
75	101	32	88	19
84	15	66	122	28
118	49	80	6	62

Третій слой.

33	89	20	71	102
67	123	29	85	11
76	7	63	119	50
115	41	97	3	59
24	55	106	37	93

Четвертый слой.

64	120	46	77	8
98	4	60	111	42
107	38	94	25	51
16	72	103	34	90
30	81	12	68	124

Пятый слой.

95	21	52	108	39
104	35	86	17	73
13	69	125	26	82
47	78	9	65	116
56	112	43	99	5

http://mathesis.ru

помѣщено въ центральной клѣткѣ; благодаря этому 4 главныя діагонали и 30 короткихъ діагоналей даютъ постоянную сумму 315. Что же касается условія, чтобы и діагонально расположенные ряды, параллельные короткимъ діагоналямъ, давали попарно ту же постоянную сумму, то это условіе не можетъ быть выполнено при $n = 5$; при большемъ же значеніи n можно выполнить и это условіе.

---

http://mathesis.ru

§ 20.

Ходъ коня.

А. Введеніе.

Въ семейныхъ журналахъ встрѣчаются подъ названіемъ „ходъ коня“ задачи, въ которыхъ отъ читателя требуется, чтобы онъ соединилъ въ слова 64 слога, написанныхъ въ 64 клѣткахъ фигуры, изображающей шахматную доску, соблюдая два условія. Во-первыхъ, другъ за другомъ могутъ слѣдовать только слоги, стоящіе въ такихъ двухъ клѣткахъ шахматной доски, между которыми по правиламъ шахматной игры возможенъ ходъ коня; во-вторыхъ, составленный согласно этому принципу рядъ словъ долженъ имѣть какой-нибудь смыслъ; обыкновенно изъ ряда этихъ словъ должно даже составиться небольшое риѳмованное стихотвореніе. Прежде, чѣмъ перейти къ подробному ознакомленію съ этими задачами и болѣе трудными обратными задачами, въ которыхъ читателю предлагаютъ составить правильные „ходы коня“, мы должны дать поясненія, которыя помогутъ намъ понять дальнѣйшее изложеніе.

Представимъ себѣ разложенный на квадраты прямоугольникъ съ вертикальными и горизонталь-

http://mathematic.ru

ными сторонами; переходъ отъ всякой клѣтки въ какую-либо сосѣднюю клѣтку, расположенную справа или слѣва, кверху или книзу отъ первой, мы будемъ называть „ходомъ“. Понятно, что изъ каждой изъ четырехъ угловыхъ клѣтокъ можно сдѣлать всего два хода, а отъ каждой краевой клѣтки, которая не есть въ то же время и угловая, можно сдѣлать всего три хода, тогда какъ отъ всякой другой клѣтки, не расположенной у края доски, можно сдѣлать четыре хода. Ходъ вправо или влѣво мы будемъ называть „горизонтальнымъ“, ходъ вверхъ или внизъ—„вертикальнымъ“. Пользуясь этими терминами, мы можемъ слѣдующимъ образомъ формулировать правило движеній коня въ шахматной игрѣ: конь дѣлаетъ сразу одинъ горизонтальный и два вертикальныхъ шага или же, наоборотъ, одинъ вертикальный и два горизонтальныхъ шага. Мы будемъ говорить о двухъ клѣткахъ, что онѣ „связаны ходомъ коня“, если конь можетъ перейти изъ одной въ другую согласно данному правилу, т. е. если эти клѣтки отстоятъ другъ отъ друга на одинъ вертикальный и два горизонтальныхъ хода или на одинъ горизонтальный и два вертикальныхъ хода. Движеніе между двумя клѣтками, связанными ходомъ коня, мы будемъ называть скачкомъ. Изъ каждой угловой клѣтки возможны два скачка; изъ каждой краевой, отстоящей на одинъ ходъ отъ угло-

вой клѣтки, возможны 3 скачка, а изъ каждой краевой клѣтки, удаленной на два хода или болѣе отъ угловой клѣтки, возможны 4 скачка. Далѣе, каждая клѣтка, отстоящая отъ края на одинъ горизонтальный и одинъ вертикальный ходъ, связана ходомъ коня съ 4 клѣтками, а тѣ клѣтки, которыя отстоятъ на одинъ ходъ отъ одного края и на два хода отъ сосѣдняго края, связаны ходомъ коня съ 6 клѣтками. Наконецъ, клѣтка отстоящая отъ каждаго края на два хода или болѣе, связана ходомъ коня съ 8 клѣтками. Такимъ образомъ, изъ каждой изъ 64 клѣтокъ обыкновенной шахматной доски возможно сдѣлать такое число скачковъ, какое указано въ соотвѣтствующей клѣткѣ прилагаемой фигуры (стр. 218):

http://mathesis.ru

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

Сумма этихъ чиселъ равна 336. Если же мы будемъ считать скачокъ изъ одной клѣтки въ другую и обратный скачокъ изъ второй клѣтки въ первую за одинъ только скачокъ, то число ходовъ коня на обыкновенной шахматной доскѣ оказывается равнымъ 168. Эти разсужденія можно легко распространить на случай прямоугольной шахматной доски съ $a \times b$ клѣтками. Въ этомъ случаѣ число паръ клѣтокъ, связанныхъ между собой ходомъ коня, равно

$$2(2ab - 3a - 3b + 4).$$

http://rcin.org.pl

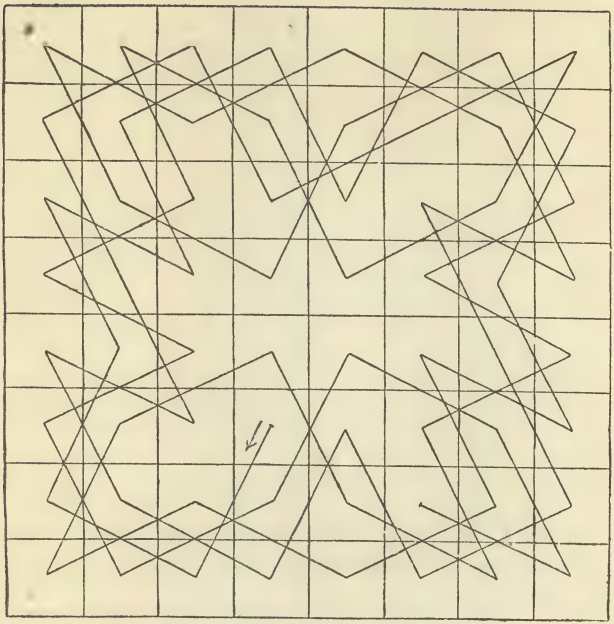
Итакъ, Эйлерова задача о ходѣ коня состоитъ въ слѣдующемъ: нужно размѣстить въ 64 клѣткахъ шахматной доски 64 числа отъ 1 до 64 такимъ образомъ, чтобы всякія двѣ клѣтки, содержащія два послѣдовательныхъ числа, были связаны ходомъ коня. Если мы затѣмъ числа отъ 1 до 64 замѣнимъ еще 64-мя слогами, совокупность которыхъ имѣетъ какой-нибудь смыслъ, то возникнетъ обратная задача, а именно прочитать 64 слога въ такомъ порядкѣ, чтобы въ нихъ оказался желанный смыслъ; при этомъ лицо, рѣшающее подобную задачу, всякій разъ колеблется въ выборѣ различныхъ возможныхъ скачковъ изъ послѣдней занятой клѣтки: эти сомнѣнія доставляютъ наибольшее затрудненіе въ началѣ и также въ 16 среднихъ клѣткахъ, каждая изъ которыхъ связана ходомъ коня съ 8 клѣтками. Мы прилагаемъ здѣсь примѣръ такой задачи на ходъ коня.

http://mathesis.ru

мнѣ	вамъ	дѣ	ю	Но	да	ми	мно
и	мо	грудь	зы	об	не	лю	при
по	чить	у	ла	Сю	я	го	ва
знать	мо	вѣдь	лег	поль	сло	шелъ	дямъ
то	ис	А	пе	но ль	го	не	будь
ду	ше	му	Ты	зла	ни	раз	бла
шать	по	Все	мож	редъ	зать	да	сдѣ
луч	шу	слу	И	рю	лалъ	кѣмъ	ска

Въ журналахъ для развлеченія рѣшеніе подобныхъ задачъ на ходъ коня дается, большей частью, въ формѣ діаграммы, т. е. средины слѣдующихъ другъ за другомъ клѣтокъ соединяются прямыми линіями. Можно, однако, представить рѣшеніе въ другомъ видѣ, а именно, клѣтки, слѣдующія другъ за другомъ въ ходѣ коня, занумеровываются послѣдовательно числами отъ 1 до 64. Мы даемъ здѣсь обѣ формы рѣшенія предыдущей задачи (стр. 221 и 222).

http://mathesis.ru



Уже рѣшеніе подобныхъ задачъ на ходъ коня требуетъ нѣкотораго терпѣнія, но несравненно больше терпѣнія требуется для того, чтобы составить хотя бы одну только задачу на ходъ коня. Въ самомъ дѣлѣ, если мы попробуемъ, исходя отъ произвольной начальной клѣтки, писать въ клѣткахъ послѣдовательно числа, начиная отъ 1, по правилу хода коня, то мы вскорѣ увидимъ, что нѣкоторыя клѣтки остаются пустыми, при чемъ никогда уже нельзя будетъ

31	54	47	8	33	10	27	50
46	7	32	53	28	49	34	11
5	30	55	48	9	36	51	26
56	45	6	29	52	25	12	35
43	4	57	20	61	14	37	24
58	19	44	1	40	23	62	13
3	42	17	60	21	64	15	38
18	59	2	41	16	39	22	63

добраться до нихъ, потому что тѣ клѣтки, изъ которыхъ можно было бы до нихъ добраться, уже заняты. Мы начнемъ тогда дѣлать измѣненія; но скоро окажется, что снова остаются пустыя клѣтки, до которыхъ нельзя добраться; лишь путемъ долгихъ усилій удается правильно составить задачу на ходъ коня. Существуютъ, однако, методы, которые легко приводятъ къ цѣли; эти методы составляютъ предметъ дальнѣйшаго изложенія.

http://rusneb.ru

В. Историческія свѣдѣнія.

Задача о заполненіи 64 клѣтокъ числами отъ 1 до 64 по правилу хода коня встрѣчается въ литературѣ впервые въ 1759 г., а именно въ 15 томѣ мемуаровъ Берлинской Академіи. Знаменитѣйшій нѣмецкій математикъ XVIII столѣтія Леонардъ Эйлеръ указываетъ тамъ, что эту задачу кто-то предложилъ въ одномъ обществѣ, и что этому лицу удалось также правильно рѣшить эту задачу, принимая любую клѣтку за начальную. Эйлеръ, обратившій вниманіе на математическое содержаніе задачи, переписывался относительно нея съ Бертраномъ изъ Женевы и опубликовалъ въ указанной статьѣ методы, которые даютъ возможность, исходя отъ какой-нибудь попытки, которая оказалась неудачной вслѣдствіе того, что нѣкоторыя клѣтки остались незаполненными, постепенно придти къ правильному рѣшенію. Далѣе, Эйлеръ прибавилъ новыя условія, которыя увеличиваютъ трудность рѣшенія задачи: можно потребовать, напримѣръ, чтобы были заполнены всѣ клѣтки одной только половины прежде, чѣмъ перейти къ клѣткамъ другой половины. Въ томъ же направленіи задачу разрабатывалъ кромѣ Эйлера, еще Вандермондъ (Vandermonde), членъ французскаго національнаго института; статья, въ которой Вандермондъ разсматривалъ задачу съ точки зрѣнія геометріи положенія, появилась въ 1771 г. въ „Mémoires de Paris“. Затѣмъ въ

1773 г. Колини (Colini) въ Мангеймѣ въ особомъ сочиненіи указалъ методъ, который даетъ, правда, лишь небольшую часть изъ множества возможныхъ рѣшеній, но зато приводитъ къ нимъ прямымъ и вѣрнымъ путемъ. Этимъ, болѣе старымъ методамъ противопоставляются методы, принадлежащіе болѣе позднимъ французскимъ ученымъ, у которыхъ выборъ того или другого хода коня напередъ опредѣляется нѣкоторымъ принципомъ, тогда какъ методы Эйлера и Вандермонда по существу сводятся лишь къ тому, что произвольно выбранные вначалѣ ходы коня впослѣдствіи исправляются такимъ образомъ, чтобы получилось правильное рѣшеніе. Этими французскими учеными были Полиньякъ (Polignac) и Лакіеръ (Laquière). Полиньякъ опубликовалъ свои изслѣдованія о „ходѣ коня“ частью въ „Извѣстіяхъ Парижской Академіи“ (апрѣль 1861 г.), частью въ „Bulletin de la Société Mathématique de France“ за 1880 г. Въ этомъ же выпускѣ находится и весьма богатая содержаніемъ статья Лакіера о ходѣ коня. Важнѣйшее изъ изслѣдованій, въ которыхъ разсматриваютъ задачу о ходѣ коня въ прямоугольникѣ съ $a \times b$ клѣтками, принадлежитъ г. Flye-Sainte Marie; оно напечатано въ апрѣльской тетради „Bulletin de la Société Mathématique de France“ за 1877 г. Авторъ вполнѣ исчерпалъ въ этомъ изслѣдованіи случай, когда имѣется 4×8 клѣтокъ, расположенныхъ въ видѣ прямоугольника,

и опредѣлилъ даже число возможныхъ ходовъ коня; нужно замѣтить, что для случая 8×8 клѣтокъ число возможныхъ ходовъ коня до сихъ поръ не опредѣлено даже приблизительно. Наконецъ, авторъ этой книги расширилъ задачу о ходѣ коня, взявъ вмѣсто квадрата съ 8×8 клѣтками кубъ съ $4 \times 4 \times 4$ отдѣленіями („Naturwissenshaftliche Wochenschrift“ за 1892 г.).

С. Методы Эйлера и Вандермонда.

Если одно какое-нибудь рѣшеніе задачи о послѣдовательномъ прохожденіи конемъ всѣхъ 64-хъ клѣтокъ шахматной доски уже найдено, то изъ этого рѣшенія можно вывести весьма разнообразныя измѣненія хода, а именно — можно замѣнить обратными всѣ ходы, начиная съ любой клѣтки, которая связана ходомъ коня съ заключительной клѣткой найденнаго рѣшенія. Будемъ исходить въ видѣ примѣра изъ слѣдующаго рѣшенія:

http://mathesis.ru

34	21	52	9	36	19	54	7
51	10	35	20	53	8	37	18
22	33	12	61	28	45	6	55
11	50	29	44	13	62	17	38
32	23	60	63	46	27	56	5
49	64	43	30	59	14	39	16
24	31	2	47	26	41	4	57
1	48	25	42	3	58	15	40

Здѣсь клѣтка съ числомъ 11 связана ходомъ коня съ послѣдней клѣткой 64; мы можемъ поэтому получить изъ этого рѣшенія новое, оставивъ всѣ числа отъ 1 до 11 въ ихъ клѣткахъ и замѣнивъ потомъ число 64 числомъ 12, число 63—числомъ 13, число 62—числомъ 14 и т. д., такъ что заключительной клѣткой съ числомъ 64 окажется та, въ которой первоначально находилось число 12. Такъ какъ въ первоначальномъ рѣшеніи клѣтка 47 тоже была связана ходомъ коня съ клѣткой 64, то мы можемъ получить изъ этого рѣшенія второе производное рѣшеніе, если мы оставимъ числа отъ 1 до 47 въ ихъ клѣткахъ, а числа отъ 48 до 64 замѣнимъ

соотвѣтственно числами отъ 64 до 48. Этотъ пріемъ можно повторить какое угодно число разъ: дѣйствительно, получивъ какое-нибудь производное рѣшеніе, мы можемъ поступить съ клѣткой, которая въ этомъ рѣшеніи связана ходомъ коня съ заключительной клѣткой совершенно такимъ же образомъ, какъ мы дѣлали въ нашемъ примѣрѣ съ клѣткой 11 или 47. Мало того, такимъ способомъ мы можемъ достигнуть того, чтобы *любая наперед заданная клѣтка оказалась заключительной*. Чтобы ясно понять это, обозначимъ каждую изъ 64 клѣтокъ шахматной доски для краткости тѣмъ числомъ, которое написано въ этой клѣткѣ на предыдущей фигурѣ. Тогда первое производное рѣшеніе можно представить сокращенно въ такомъ видѣ:

1 до 11, 64 до 12.

Такъ какъ новая заключительная клѣтка 12 связана ходомъ коня съ клѣткой 53, то мы получаемъ второе производное рѣшеніе:

1 до 11, 64 до 53, 12 до 52.

Такъ какъ клѣтка 52 связана ходомъ коня съ клѣткой 33, то отсюда получается производное рѣшеніе:

1 до 11, 64 до 53, 12 до 33, 52 до 34

и т. д.

http://mathesis.ru

Если мы желаемъ, напримѣръ, чтобы заключительной клѣткой была клѣтка 40 въ правомъ нижнемъ углу квадрата, то обратимъ вниманіе на слѣдующій рядъ ходовъ коня:

$$64 — 29 — 30 — 41 — 40$$

и сообразно съ ними измѣнимъ первоначальное рѣшеніе слѣдующимъ образомъ:

1) 1 до 29, 64 до 30;
2) 1 до 29, 64 до 41, 30 до 40;

такимъ образомъ, условіе, чтобы клѣтка съ числомъ 40 сдѣлалась заключительной, выполнено нами кратчайшимъ способомъ. Легко понять, что данное рѣшеніе можно превратить въ другое съ напередъ указанной заключительной клѣткой самыми разнообразными путями; далѣе, мы можемъ такимъ же самымъ способомъ достигнуть того, чтобы любая клѣтка стала начальной, потому что всѣ указанные только-что ходы коня можно обратить.

Этотъ способъ преобразовывать ходъ коня такимъ образомъ, чтобы любая напередъ указанная клѣтка сдѣлалась заключительной клѣткой, лежитъ въ основаніи рѣшенія слѣдующей задачи, имѣющей важное значеніе для практическаго составленія ходовъ коня. Предположимъ, что въ результатѣ нѣкотораго движенія коня осталось нѣсколько пустыхъ клѣтокъ, которыхъ конь уже никакимъ образомъ не мо-

жетъ занять; требуется такъ измѣнить ходъ, чтобы пустыя клѣтки заполнились и чтобы такимъ образомъ получился правильный „ходъ коня“. Съ цѣлью сдѣлать яснымъ рѣшеніе этой задачи, мы предположимъ, что кому-нибудь удалось покрыть движеніемъ коня 62 клѣтки шахматной доски, но что остальныя двѣ клѣтки остались пустыми и недоступными. Допустимъ далѣе, что при этомъ получилось то именно расположеніе послѣдовательно занятыхъ клѣтокъ, которое изображено на таблицѣ; клѣтки, оставшіяся пустыми, отмѣчены буквами a и b:

7	18	47	30	5	16	45	28
48	31	6	17	46	29	4	15
19	8	49	52	39	60	27	44
32	53	40	59	42	51	14	3
9	20	a	50	61	38	43	26
54	33	62	41	58	25	2	13
21	10	35	56	23	12	37	b
34	55	22	11	36	57	24	1

http://kraknosis.ru

Послѣдовательность клѣтокъ отъ 1 до 62, пройденныхъ конемъ, мы можемъ преобразовать совершенно такъ, какъ раньше послѣдовательность клѣтокъ отъ 1 до 64 была преобразована въ другую послѣдовательность, въ которой заключительная клѣтка напередъ задана. Сообразно съ этимъ преобразуемъ рядъ отъ 1 до 62 въ другой рядъ, въ которомъ заключительной клѣткой являлась бы клѣтка, связанная ходомъ коня съ незанятой клѣткой a. Такова, напримѣръ, въ нашемъ случаѣ клѣтка 10. Число 62 будетъ, такимъ образомъ, предшествовать новой заключительной клѣткѣ, и тогда можно будетъ поставить число 63 въ свободной клѣткѣ a. Съ полученнымъ рядомъ изъ 63 клѣтокъ мы поступимъ такимъ же образомъ, т. е. мы преобразуемъ его въ такой рядъ, въ которомъ послѣдняя клѣтка даетъ возможность коню сдѣлать ходъ во вторую свободную клѣтку b. Напишемъ затѣмъ число 64 въ клѣткѣ b, и мы получимъ правильный „ходъ коня“. Если бы не двѣ только, но бо́льшее число клѣтокъ остались пустыми, то намъ пришлось бы примѣнить этотъ пріемъ столько разъ, сколько имѣется пустыхъ клѣтокъ. Чтобы превратить изображенный выше пробный „ходъ коня“ въ настоящій, мы замѣтимъ, что пустая клѣтка a связана ходомъ коня съ клѣткой 10, клѣтка 10 — съ клѣткой 9, а клѣтка 9 — съ клѣткой 62, которая пока является послѣдней. Сообразно съ этимъ мы

образуемъ изъ ряда отъ 1 до 62 новый рядъ

1 до 9, 62 до 10,

и затѣмъ слѣдуетъ лишь присоединить къ этому ряду клѣтку a, которая будетъ здѣсь 63-тьей. Чтобы превратить теперь этотъ полученный рядъ изъ 63 клѣтокъ въ такой, къ которому можно было бы присоединить и клѣтку b, мы должны найти, если возможно, двѣ клѣтки, связанныя ходомъ коня, одна съ клѣткой a, другая — съ клѣткой b, при чемъ эти двѣ искомыя клѣтки должны содержать два послѣдовательныхъ числа. Этимъ условіямъ въ нашемъ примѣрѣ удовлетворяютъ клѣтки съ числами 58 и 57. Сообразно съ этимъ мы превращаемъ прежній рядъ въ слѣдующій:

1 до 9, 63 до 58, 10 до 57;

остается лишь присоединить къ этому ряду клѣтку b, и мы получимъ правильный „ходъ коня“. Если мы заполнимъ въ немъ послѣдовательныя клѣтки по порядку числами отъ 1 до 64, то мы получимъ слѣдующій „ходъ коня“, въ которомъ уже не будетъ ни одной пустой клѣтки:

http://mathesis.ru

7	24	53	36	5	22	51	34
54	37	6	23	52	35	4	21
25	8	55	58	45	12	33	50
38	59	46	13	48	57	20	3
9	26	15	56	11	44	49	32
60	39	10	47	14	31	2	19
27	16	41	62	29	18	43	64
40	61	28	17	42	63	30	1

Въ полученномъ нами „ходѣ коня“ числа 1 и 64 стоятъ въ двухъ клѣткахъ, не связанныхъ между собой ходомъ коня. Но уже со временъ Эйлера предпочитаютъ составлять такіе „ходы коня“, въ которыхъ заключительная клѣтка связана ходомъ коня съ первоначальной. Такого рода ходы коня называются замкнутыми; они имѣютъ ту особенность, что любую клѣтку въ нихъ можно принять за начальную, потому что клѣтка съ числомъ 64 допускаетъ переходъ коня въ клѣтку съ числомъ 1. Изложенный нами методъ превращенія какого-нибудь даннаго правильнаго хода коня въ новый, въ которомъ заключительной клѣткой является какая-

либо произвольно выбранная, даетъ намъ также возможность преобразовать всякій незамкнутый ходъ коня въ замкнутый. Для этого достаточно выбрать въ качествѣ заключительной клѣтки такую, которая была бы связана ходомъ коня съ начальной клѣткой, и примѣнить нашъ методъ. Напримѣръ, чтобы превратить полученный нами въ послѣдній разъ ходъ коня въ замкнутый, мы должны въ клѣткахъ, занятыхъ здѣсь числами

11 до 17, 10 до 1, 18 до 31, 64 до 57, 32 до 45, 56 до 46,

поставить соотвѣтственно послѣдовательныя числа

1 до 7, 8 до 17, 18 до 31, 32 до 39, 40 до 53, 54 до 64.

Въ результатѣ мы получимъ слѣдующій замкнутый въ себѣ ходъ коня, который мы можемъ поэтому читать 64-мя различными способами, т. е. исходя отъ любой клѣтки, какъ отъ начальной.

http://mathesis.ru

48	27	36	9	46	25	56	11
35	6	47	26	37	10	45	24
28	49	8	5	64	55	12	57
7	34	63	54	3	38	23	44
50	29	4	1	62	53	58	13
33	18	31	52	39	2	43	22
30	51	16	61	20	41	14	59
17	32	19	40	15	60	21	42

D. Методъ Колини.

Промежуточное мѣсто между только-что описанными методами Эйлера и Вандермонда, съ одной стороны, и новыми методами Полиньяка и Лакіера, съ другой, занимаетъ методъ, который Колини изложилъ въ своей работѣ „Solution du problème du Cavalier au jeu des échecs“, изданной въ 1773 г. въ Маннгеймѣ. По этому методу слѣдуетъ мысленно раздѣлить шахматную доску на двѣ области: на средній квадратъ, состоящій изъ 16 клѣтокъ, симметрично расположенныхъ вокругъ центра, и на рамку, состоящую изъ прочихъ 48 клѣтокъ; затѣмъ Колини даетъ слѣдующее правило:

„Заполнимъ двѣнадцать клѣтокъ рамки такимъ образомъ, чтобы изъ 12-ой клѣтки конь имѣлъ ходъ въ клѣтку средняго квадрата. Въ этомъ послѣднемъ заполнимъ 4 клѣтки, которыя образуютъ либо квадратъ, либо ромбъ; затѣмъ заполнимъ еще 12 клѣтокъ рамы, потомъ опять 4 клѣтки средняго квадрата и т. д.“

Поступая такимъ образомъ, мы въ самомъ дѣлѣ будемъ получать всегда безъ труда и безъ колебаній правильный „ходъ коня“, — напримѣръ, слѣдующій:

40	23	52	7	38	21	50	5
53	8	39	22	51	6	37	20
24	41	14	47	30	61	4	49
9	54	31	62	15	48	19	36
42	25	46	13	64	29	60	3
55	10	63	32	45	16	35	18
26	43	12	57	28	33	2	59
11	56	27	44	1	58	17	34

Е. Методы Полиньяка и Лакіера.

Подобно Колини и новые изслѣдователи теоріи „хода коня“ разсматриваютъ отдѣльныя ква-

http://mathesis.ru

дратныя части съ 4×4 клѣтками, но пользуются не среднимъ квадратомъ, а четырьмя квадратными частями шахматной доски, на которыя она дѣлится двумя линіями, проведенными черезъ центръ доски параллельно краямъ ея. Такой квадратный участокъ даетъ 4 замкнутыхъ скачка коня, каждое по 4 клѣткамъ, какъ показываетъ слѣдующая фигура:

c	d	b	a
b	a	c	d
d	c	a	b
a	b	d	c

Въ каждыхъ четырехъ клѣткахъ, отмѣченныхъ одной и той же буквой, конь можетъ передвигаться такимъ образомъ, чтобы изъ четвертой клѣтки попасть опять въ первую, при чемъ этотъ переходъ можетъ совершаться въ двухъ различныхъ направленіяхъ: какъ въ направленіи движенія часовой стрѣлки, такъ и въ противоположномъ направленіи. Подобное движеніе коня по 4 клѣткамъ, которыя такъ расположены въ квадратѣ изъ 16 клѣтокъ, какъ въ нашей фигурѣ расположены клѣтки съ одной и той же буквой, мы будемъ для краткости называть „четвернымъ ходомъ“ (Viersprung). Су-

ществуетъ четыре рода такихъ четверныхъ ходовъ; въ нашей фигурѣ каждому четверному ходу соотвѣтствуетъ особая буква, которой помѣчены всѣ его четыре клѣтки; четыремъ четвернымъ ходамъ соотвѣтствуютъ 4 буквы a, b, c, d. Замѣтимъ, что четверные ходы a и c занимаютъ каждый по четыре вершины ромба, тогда какъ другіе два четверныхъ хода b и d занимаютъ каждый по четыре вершины косо расположеннаго квадрата. Теперь отмѣтимъ себѣ разъ навсегда въ четырехъ квадратныхъ участкахъ тѣ 4×4 клѣтки, которыя образуютъ 4 четверныхъ хода одного и того же рода. Тогда мы получимъ всего 16 отмѣченныхъ клѣтокъ, которыя конь можетъ проходить различными способами такъ, чтобы изъ 16-ой клѣтки возвратиться обратно въ первую. Всякое такое движеніе коня черезъ 16 клѣтокъ, связанныхъ между собой указаннымъ образомъ, мы будемъ называть „шестнадцатикратнымъ ходомъ“ (Sechzehn-Sprung), при чемъ будемъ различать типы A, B, C и D соотвѣтственно типамъ a, b, c и d, къ которымъ относятся 4 клѣтки квадратнаго участка, пройденныя конемъ. Такъ, на прилагаемой фигурѣ 16 клѣтокъ, отмѣченныхъ буквой a, даютъ шестнадцатикратный ходъ типа A. Точно такъ же клѣтки, отмѣченныя буквами b, c и d, составляютъ шестнадцатикратные ходы, принадлежащіе соотвѣтственно типамъ B, C или D.

c	d	b	a	c	d	b	a
b	a	c	d	b	a	c	d
d	c	a	b	d	c	a	b
a	b	d	c	a	b	d	c
c	d	b	a	c	d	b	a
b	a	c	d	b	a	c	d
d	c	a	b	d	c	a	b
a	b	d	c	a	b	d	c

Если заставить коня дѣлать шестнадцатикратные ходы такъ, чтобы, закончивъ одинъ, онъ могъ всякій разъ перейти къ другому, то постоянно будетъ получаться правильный замкнутый ходъ коня. Составленные такимъ образомъ ходы коня обладаютъ большей симметричностью и правильностью, чѣмъ полученные путемъ испытаній. Это станетъ особенно ясно, если мы представимъ ходы коня графически, т. е. если мы соединимъ средины послѣдовательныхъ клѣтокъ отрѣзками. Въ видѣ примѣра мы прилагаемъ слѣдующій ходъ коня, въ которомъ послѣдовательныя шестнадцатикратные ходы соотвѣтственно принадлежатъ типамъ C, D, A и B:

10	27	56	39	14	29	58	43
55	38	11	28	57	42	15	30
26	9	40	53	32	13	44	59
37	54	25	12	41	60	31	16
8	23	52	33	4	17	62	45
51	36	5	24	61	48	1	18
22	7	34	49	20	3	46	63
35	50	21	6	47	64	19	2

При этомъ ходѣ коня 16 клѣтокъ каждаго шестнадцатикратнаго хода проходятся въ такой послѣдовательности, что конь каждый разъ посѣщаетъ сперва по порядку четыре клѣтки каждаго четверного хода. Однако, такая послѣдовательность отнюдь не является необходимой, какъ показываетъ нижеслѣдующій ходъ коня; послѣдовательность типовъ въ немъ, какъ и въ предыдущемъ, есть C D A B, но въ немъ однако, конь всякій разъ занимаетъ сперва только три клѣтки каждаго квадратнаго участка и лишь затѣмъ проходитъ черезъ пропущенныя раньше клѣтки:

http://mathesis.ru

2	27	54	39	4	25	56	37
53	40	3	26	55	38	5	24
28	1	46	63	30	15	36	57
41	52	29	16	47	62	23	6
12	17	64	45	14	31	58	35
51	42	13	32	61	48	7	22
18	11	44	49	20	9	34	59
43	50	19	10	33	60	21	8

Такимъ образомъ, этотъ ходъ коня образуется, правда, изъ 4 шестнадцатикратныхъ ходовъ, но не изъ 16 четверныхъ ходовъ.

Что касается тѣхъ ходовъ коня, которые составляются изъ 16 полностью исчерпанныхъ четверныхъ ходовъ, то ихъ можно схематически представить слѣдующимъ образомъ. Къ четыремъ знакамъ a, b, c, d, выражающимъ четыре рода четверныхъ ходовъ, присоединимъ въ видѣ индексовъ соотвѣтственно одно изъ четырехъ чиселъ 1, 2, 3, 4, смотря по тому, предполагается ли четверной ходъ совершеннымъ въ квадратномъ участкѣ вверху слѣва, или вверху справа, или внизу справа, или внизу

слѣва. При такомъ обозначеніи первый, напримѣръ, изъ двухъ вышеприведенныхъ ходовъ коня представится схематически слѣдующимъ образомъ:

$$c_3\ c_4\ c_1\ c_2\ d_3\ d_4\ d_1\ d_2\ a_4\ a_1\ a_2\ a_3\ b_4\ b_1\ b_2\ b_3.$$

Обратно, если дана подобная схема и начальная клѣтка, то этимъ однозначно опредѣленъ весь путь коня, ибо индексы указываютъ, въ какой участокъ мы должны перейти послѣ того, какъ выполненъ четверной ходъ, и вслѣдствіе этого послѣдовательность при заполненіи клѣтокъ уже не можетъ вызывать никакихъ колебаній. Такъ, схема

$$c_1\ c_4\ c_3\ c_2\ d_1\ d_4\ d_3\ d_2\ a_2\ a_1\ a_4\ a_3\ b_2\ b_1\ b_4\ b_3$$

приводитъ къ слѣдующему замкнутому ходу коня, указанному на стр. 242.

Если мы оставимъ безъ измѣненія послѣдовательный порядокъ 16 буквъ схемы и будемъ мѣнять лишь начало, то мы будемъ получать ходы коня, принадлежащіе къ числу тѣхъ 63, которые могутъ быть выведены изъ каждаго замкнутаго хода коня путемъ замѣны начальной клѣтки.

Въ предыдущихъ примѣрахъ мы каждый разъ повторяемъ одинъ за другимъ 4 четверныхъ хода одного и того же типа и такимъ способомъ образуемъ шестнадцатикратные ходы. Однако, при нѣкоторомъ вниманіи можно легко получать правильные ходы коня еще иначе: можно, исчерпавъ одинъ четверной ходъ, всякій разъ переходить къ но-

3	18	53	38	15	32	51	34
54	39	2	17	52	35	14	31
19	4	37	56	29	16	33	50
40	55	20	1	36	49	30	13
5	22	57	44	9	28	63	48
58	41	8	21	64	45	12	27
23	6	43	60	25	10	47	62
42	59	24	7	46	61	26	11

вому независимо отъ того, будетъ ли онъ того же типа или другого. Напримѣръ, въ слѣдующей схемѣ правильнаго хода коня каждый типъ повторяется постоянно лишь два раза:

$$a_4\ a_3\ b_2\ b_1\ c_3\ c_4\ d_3\ d_2\ a_2\ a_1\ b_4\ b_3\ c_1\ c_2\ d_1\ d_4.$$

Эта схема даетъ слѣдующій ходъ коня (см. стр. 243):

http://mathesis.ru

51	58	13	38	53	32	11	34
14	39	52	57	12	35	54	31
59	50	37	16	29	56	33	10
40	15	60	49	36	9	30	55
23	62	41	4	17	28	47	8
42	1	24	61	48	5	18	27
63	22	3	44	25	20	7	46
2	43	64	21	6	45	26	19

Хотя ходы коня, которые можно находить по методу Полиньяка и Лакіера, отличаются отъ всѣхъ другихъ симметричностью и изяществомъ, но они образуютъ лишь весьма малочисленную группу въ совокупности всѣхъ возможныхъ замкнутыхъ ходовъ коня; поэтому они ничего не прибавляютъ къ рѣшенію главнаго вопроса о нахожденіи такого метода, который завѣдомо приводилъ бы ко всѣмъ возможнымъ ходамъ коня и благодаря этому далъ бы возможность опредѣлить число ихъ. Этотъ главный вопросъ до сихъ поръ еще не разрѣшенъ.

http://rcin.org.pl

F. Ходы коня въ случаѣ, когда число клѣтокъ меньше 64.

Если мы положимъ въ основу задачи не шахматную доску съ ея 8×8 клѣтками, но квадратъ или прямоугольникъ съ меньшимъ числомъ клѣтокъ, то трудности рѣшенія основного вопроса, намѣченнаго въ концѣ параграфа E, значительно уменьшатся. Напримѣръ, имѣется полное рѣшеніе основной задачи для того случая, когда прямоугольникъ, по которому долженъ проходить конь, состоитъ изъ 4×8 клѣтокъ, т. е. представляетъ собой половину шахматной доски. Относящимся сюда изслѣдованіемъ мы обязаны г. Flye-Sainte-Marie („Bulletin de la Société Mathématique de France“, 1877). Онъ дѣлитъ сперва 32 клѣтки половины шахматной доски на двѣ группы по 16 въ каждой, какъ это видно изъ слѣдующей фигуры:

	a		a		a		a
	i		i		i		i
i		i		i		i	
a		a		a		a	

http://mathesis.ru

Клѣтки, снабженныя буквами, образуютъ одну группу, а прочія клѣтки—другую группу. Каждая группа имѣетъ 8 наружныхъ и 8 внутреннихъ клѣтокъ. Въ группѣ, состоящей изъ заполненныхъ клѣтокъ, 8 наружныхъ отмѣчены буквой a, а 8 внутреннихъ—буквой i. Можно строго доказать, что для того, чтобы 32 клѣтки дали правильный ходъ коня, должны быть выполнены слѣдующія три условія:

1. Необходимо, чтобы были пройдены одна за другой 16 клѣтокъ каждой группы.

2. Необходимо, чтобы изъ тѣхъ двухъ клѣтокъ, которыми начинается и заканчивается каждая группа, одна была наружной, другая—внутренней.

3. Начальная и заключительная клѣтка всего хода коня должны быть обѣ наружными; не существуетъ, слѣдовательно, замкнутыхъ ходовъ коня.

Соблюдая эти условія, можно при нѣкоторомъ вниманіи получить всевозможные ходы коня, не опасаясь того, что въ концѣ останутся пустыми клѣтки, до которыхъ уже нельзя будетъ добраться. Указанныя условія соблюдены, напримѣръ, при полученіи слѣдующаго хода коня:

http://mathesis.ru

26	11	30	7	32	13	22	5
29	8	27	12	23	6	19	16
10	25	2	31	14	17	4	21
1	28	9	24	3	20	15	18

Такъ какъ не существуетъ никакихъ другихъ ходовъ коня помимо тѣхъ, которые подчиняются условіямъ г. Flye-Sainte-Marie, то мы въ состояніи также указать число всѣхъ возможныхъ ходовъ коня при 4×8 клѣткахъ. Существуютъ всего 7772 возможности заставить коня пройти черезъ подобную половину шахматной доски, при чемъ изъ двухъ симметричныхъ ходовъ коня постоянно принятъ въ разсчетъ только одинъ.

Съ помощью этихъ результатовъ Лакіеръ указалъ въ „Bulletin de la Société Mathématique de France“ (мартъ 1880 г.) различные возможные способы получить на полной шахматной доскѣ замкнутые ходы коня такого рода, что конь сперва проходитъ полностью 32 клѣтки одной половины доски, а потомъ только переходитъ къ 32 клѣткамъ другой половины. Хотя получающіеся такимъ путемъ ходы коня составляютъ лишь весьма малую долю

всѣхъ вообще возможныхъ, но и для нихъ уже получается изрядное число:

31 054 144.

Естественно можетъ явиться высказанная уже Эйлеромъ мысль составить интересную въ какомъ-нибудь отношеніи фигуру путемъ группированія клѣтокъ на которыхъ совершается ходъ коня. Въ журналахъ для развлеченія охотно предлагаются интересныя или изящныя фигуры изъ клѣтокъ, — напримѣръ, фигура желѣзнаго креста. Можно также образовать фигуру, оставляя свободными опредѣленныя клѣтки обыкновенной шахматной доски. Такъ, авторъ этой книги составилъ къ столѣтней годовщинѣ со дня смерти Фридриха Великаго (17 авг. 1886 г.) слѣдующій ходъ коня, въ которомъ пустыя клѣтки образуютъ начальную букву F имени Friedrich, а слоги въ заполненныхъ клѣткахъ даютъ одно мѣсто изъ гимна Шуберта — Фридриху Великому (стр. 248):

http://mathesis.ru

				Rings	fall	ein	die
	Der	um		wie	Völ	chen	vom
	chen	ten	ker	Bei	der	ten	Gott
		Hel	wi	staun	groß	Wip	Ei
	nick	vor	ihm	fel	ser	Es	des
	den	Jah	die	und	To	im	Has
	ihm	ster	Sie	ren	stand	Frei	des
Gei	ben	Schaa	re	17/8 1786	Feld	der	er

Между разновидностями задачи на ходъ коня проще другихъ поддаются разработкѣ тѣ, въ которыхъ сохраняется, по крайней мѣрѣ, фигура прямоугольника. Послѣ весьма немногочисленныхъ испытаній можно убѣдиться, что при этомъ условіи невозможно получить ни одного хода коня, если число клѣтокъ меньше 12, и что при 4×4 клѣткахъ тоже нельзя провести коня черезъ всѣ клѣтки. Но уже при 3×4 клѣткахъ возможно получить нѣсколько ходовъ коня, — напримѣръ, слѣдующій:

10	7	4	1
5	2	9	12
8	11	6	3

http://mathesis.ru

Въ случаѣ квадрата наименьшимъ числомъ клѣтокъ, при которомъ возможно получить ходы коня, является 25. Примѣромъ можетъ служить слѣдующій квадратъ:

5	22	17	12	7
16	11	6	23	18
21	4	25	8	13
10	15	2	19	24
3	20	9	14	1

)

G. Центрально-симметричные ходы коня съ постоянными суммами.

Если къ Эйлеровой задачѣ на ходъ коня присоединить еще отягчающія условія, то рѣшенія въ большинствѣ случаевъ потребуютъ огромнаго терпѣнія. Наиболѣе тяжелую пробу терпѣнія выдержалъ нѣсколько десятковъ лѣтъ тому назадъ одинъ живущій въ моравской деревнѣ отставной чиновникъ Венцелидесъ (Wenzelides), который поставилъ себѣ задачей вписать въ 64 клѣтки шахматной доски числа отъ 1 до 64 такимъ образомъ, чтобы они не только образовали замкнутый ходъ

коня, но чтобы, кромѣ того, 8 чиселъ въ каждомъ горизонтальномъ и каждомъ вертикальномъ ряду давали одну и ту же сумму, а именно 260. Поработавши нѣсколько лѣтъ, Венцелидесъ нашелъ, наконецъ, нѣсколько рѣшеній, которыя опубликованы имъ въ Берлинскомъ шахматномъ журналѣ. Мы приводимъ ниже три рѣшенія (стр. 250 и 251), которыя представляютъ вмѣстѣ съ тѣмъ центрально-симметричные ходы коня, т. е. такіе, въ которыхъ отрѣзки, соединяющіе клѣтки, числа которыхъ имѣютъ разность 32, дѣлятся въ центрѣ пополамъ. Замѣтимъ, однако, что ходы коня Венцелидеса не представляютъ собой магическихъ квадратовъ, такъ какъ числа, стоящія въ обѣихъ діагоналяхъ не даютъ постоянной суммы 260.

63	14	37	24	51	26	35	10
22	39	62	13	36	11	50	27
15	64	23	38	25	52	9	34
40	21	16	61	12	33	28	49
17	60	1	44	29	48	53	8
2	41	20	57	6	55	32	47
59	18	43	4	45	30	7	54
42	3	58	19	56	5	46	31

http://mathesis.ru

15	42	3	58	5	52	31	54
2	59	14	43	30	55	50	7
41	16	57	4	51	6	53	32
60	1	44	13	56	29	8	49
17	40	61	24	45	12	33	28
64	21	38	19	36	25	48	9
39	18	23	62	11	46	27	34
22	63	20	37	26	35	10	47

15	42	55	32	17	34	27	38
54	31	16	41	28	37	18	35
43	14	29	56	33	20	39	26
30	53	44	13	40	25	36	19
51	4	57	8	45	12	21	62
58	7	52	1	24	61	46	11
3	50	5	60	9	48	63	22
6	59	2	49	64	23	10	47

http://rnd.rnesis.ru

H. Ходы коня въ клѣткахъ куба.

Въ указанномъ авторомъ расширеніи задачи о ходѣ коня путемъ распространенія ея съ двумѣрнаго на трехмѣрное пространство требуется размѣстить въ $4 \times 4 \times 4$ кубикахъ, на которые можно разбить кубъ, числа отъ 1 до 64 такимъ образомъ, чтобы два послѣдовательныхъ числа отстояли другъ отъ друга по одному изъ трехъ главныхъ направленій на 1 кубикъ, а въ каждомъ другомъ главномъ направленіи — на два кубика. Мы должны, слѣдовательно, представить себѣ слой изъ 4×4 прилегающихъ другъ къ другу кубиковъ, расположенныхъ на горизонтальномъ основаніи и образующихъ такимъ образомъ сверху квадратъ изъ 4×4 клѣтокъ. На этомъ слоѣ лежитъ второй такой же самый, на второмъ — третій и на третьемъ — четвертый конгруэнтный слой. Представимъ себѣ, что въ каждомъ изъ полученныхъ такимъ образомъ 64 кубиковъ помѣщается число, и вопросъ въ томъ, какъ размѣстить по кубикамъ числа отъ 1 до 64 такимъ образомъ, чтобы два послѣдовательныхъ числа находились въ двухъ кубикахъ, отстоящихъ другъ отъ друга въ одномъ изъ трехъ главныхъ направленій на два кубика, а въ другомъ — на одинъ. Конечно, три главныхъ направленія суть: во-первыхъ — слѣва направо, во-вторыхъ — спереди назадъ и въ третьихъ — сверху внизъ, или обратно. Слѣдуетъ замѣтить,

http://rcin.org.pl

что каждое изъ 8 отдѣленій при вершинахъ имѣетъ 6 выходовъ; каждое изъ 24 отдѣленій, расположенныхъ по ребрамъ, но не въ вершинахъ куба, имѣетъ 8 выходовъ; далѣе, каждое изъ 24 отдѣленій, лежащихъ по гранямъ, но не на ребрахъ, связано ходомъ коня съ 10 отдѣленіями; наконецъ, отъ каждаго изъ 8 отдѣленій, лежащихъ внутри куба вокругъ центра, можно указаннымъ образомъ пройти въ 12 отдѣленій. Въ виду большого числа отдѣленій, съ которыми благодаря скачкамъ въ пространствѣ связано ходомъ коня каждое отдѣленіе куба, задача на составленіе подобнаго рода ходовъ коня въ кубѣ пріобрѣтаетъ особенный интересъ. Точно такъ же и обратная задача о разысканіи хода коня, заданнаго въ 64 слогахъ, пріобрѣтаетъ значительно большій интересъ вслѣдствіе того, что слоги слѣдуетъ представлять себѣ написанными въ $4 \times 4 \times 4$ клѣткахъ вмѣсто 8×8. Такъ какъ бумага имѣетъ лишь два измѣренія, а задача со слогами на ходъ коня въ кубѣ требуетъ трехъ измѣреній, то она можетъ быть задана лишь съ помощью квадратовъ, содержащихъ каждый по 16 клѣтокъ, которые мы можемъ представлять себѣ, какъ поверхности четырехъ слоевъ, расположенныхъ одинъ надъ другимъ и отсчитываемыхъ сверху внизъ.

http://mathesis.ru

Первый слой.

да	мо	кѣмъ	Все
редъ	луч	Сю	вѣдь
ю	при	пе	ни
ше	будь	по	шелъ

Второй слой.

ми	раз	да	слу
го	Ты	ва	ска
но ль	об	шать	рю
ис	бла	зать	Сло

Третій слой.

по	не	знать	го
у	поль	то	зла
дѣ	И	мно	зы
Не	вамъ	лалъ	му

Четвертый слой.

А	чить	дѣ	я
ла	Но	ду	мнѣ
лег	мож	дямъ	и
лю	мо	грудь	шу

http://mathesis.ru

Рѣшеніе этой кубической задачи на ходъ коня здѣсь приводится:

10	7	22	17
21	18	9	6
8	11	20	23
19	24	5	12

27	62	15	2
14	1	26	63
61	28	3	16
4	13	64	25

42	37	56	51
55	52	43	40
38	41	50	53
49	54	39	44

57	30	47	36
48	33	58	31
29	60	35	46
34	45	32	59

Методъ, по которому авторъ составилъ этотъ кубическій ходъ коня, въ общемъ сходенъ съ новымъ французскимъ методомъ для полученія обыкновенныхъ ходовъ коня: каждыя четыре послѣдовательныхъ числа образуютъ четверной ходъ въ квадратѣ, плоскость котораго параллельна одной изъ

шести граней куба. Нижеслѣдующій кубическій ходъ коня составленъ по другому, нѣсколько болѣе сложному закону:

24	39	58	9
19	28	51	62
38	45	4	11
47	32	17	64

35	44	3	14
50	31	18	1
23	42	55	8
20	27	52	61

22	29	54	59
25	40	57	10
48	33	16	63
37	46	5	12

49	34	15	2
36	43	6	13
21	30	53	60
26	41	56	7

Перенесеніе задачи о ходѣ коня съ куба на прямоугольный параллелопипедъ само собою напрашивается. Примѣромъ можетъ сложить слѣдующій ходъ коня въ параллелопипедѣ изъ $5 \times 4 \times 6$ кубиковъ:

http://mathesis.ru/

Первый слой.

61	14	59	10	51	6
2	25	72	15	66	19
27	44	31	48	35	50

Второй слой.

58	11	62	7	54	9
71	22	69	18	63	16
30	41	28	45	38	47

Третій слой.

3	60	13	56	5	52
26	1	24	65	20	67
43	32	39	36	49	34

Четвертый слой.

12	57	4	53	8	55
23	70	21	68	17	64
40	29	42	33	46	37

http://mathesis.ru

§ 21.

Такенъ или игра въ пятнадцать.

Давно уже ни одна игра-головоломка не возбуждала въ образованной публикѣ такого интереса, какъ игра, распространившаяся въ 1879 и 1880 г.г. въ Германіи подъ именемъ „Boss-Puzzle“, во Франціи подъ именемъ „Jeu du taquin“ (задорная игра) и въ Англіи — „Fifteenth-Puzzle“. Въ теченіе мѣсяцевъ изысканія, связанныя съ этой игрой, составляли постоянный отдѣлъ журналовъ и газетъ. Даже въ вагонахъ трамвая можно было замѣтить маленькіе ящики съ 15 деревяшками и безпокойно снующія по нимъ руки. Предпріимчивые трактирщики приглашали на такенный турниръ, при чемъ гостямъ предлагалось рѣшить поставленную хозяиномъ задачу на высокую премію. Понятно, задача оставалась нерѣшенной, такъ какъ она относилась къ группѣ неразрѣшимыхъ задачъ, съ которыми мы познакомимся ниже.

Но и серьезные ученые удѣляли свое вниманіе и время этой новой игрѣ. Первая математическая разработка этой игры появилась уже въ 1879 г. въ „American Journal of mathematics pure and applied“; авторъ ея былъ математикъ Вильсей Джонсонъ

http://rcin.org.pl

(Woolsey Johnson). Теорія этого ученаго въ обобщенномъ видѣ была опубликована затѣмъ въ томъ же журналѣ профессоромъ Стори (Story). Въ Германіи авторъ настоящей книги далъ общепонятное изложеніе теоріи этой игры, предназначенное для нематематиковъ. Оно появилось въ 1880 г. въ Гамбургѣ въ видѣ небольшой брошюры подъ названіемъ: „Теоретическій разборъ игры Boss-Puzzle въ общепонятномъ изложеніи съ руководствомъ для быстраго составленія разрѣшимыхъ и неразрѣшимыхъ задачъ“. Въ нижеслѣдующемъ изложеніи авторъ въ существенномъ пользуется содержаніемъ этой книжки, такъ какъ предложенныя другими теоретическія изслѣдованія игры менѣе доступны для нематематиковъ. Что касается изобрѣтателя этой увлекательной игры, то мы можемъ привести лишь то сообщеніе, которое сдѣлалъ на годичномъ собраніи „Association française pour l'avancement des sciences“ въ Реймсѣ профессоръ университета Гопкинса въ Балтиморѣ математикъ Сильвестеръ (Sylvester). По его словамъ эта игра была изобрѣтена въ декабрѣ 1878 года однимъ глухонѣмымъ американцемъ, пожелавшимъ размѣстить въ натуральномъ порядкѣ номера, лежавшіе въ ящикѣ въ безпорядкѣ. Онъ почему-то вынулъ одинъ номеръ, и старался затѣмъ достигнуть цѣли съ помощью простого передвиганія номеровъ (т. е. не вынимая ихъ изъ ящика).

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію первоначальной задачи такена. Она состоитъ въ слѣдующемъ: квадратный ящикъ, на днѣ котораго можетъ помѣститься ровно 16 одинаковыхъ камней квадратнаго вида, содержитъ всего лишь 15 такихъ прикасающихся другъ къ другу камней съ номерами отъ 1 до 15; требуется исключительно лишь путемъ передвиганія по дну ящика размѣстить лежащіе въ произвольномъ порядкѣ камни такъ, чтобы получилась слѣдующая фигура:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Опредѣленное этой фигурой взаимное расположеніе 15 камней мы будемъ называть правильнымъ. Положимъ, напримѣръ, что требуется перевести въ правильное слѣдующее размѣщеніе:

http://rare.ru

1	6	2	3
5	10	7	4
11	8	12	15
9	13	14	

Эту задачу можно, между прочимъ, рѣшить такъ: въ данномъ первоначальномъ размѣщеніи сперва передвигаютъ камень 15 въ пустое поле, а затѣмъ передвигаютъ три камня 11, 8, 12 вправо. Изъ полученнаго такимъ путемъ расположенія

1	6	2	3
5	10	7	4
	11	8	12
9	13	14	15

легко перейти послѣдовательно посредствомъ передвиганія къ слѣдующимъ расположеніямъ:

http://mathesis.ru

1	6	2	3
5	10	7	4
9	11	8	12
13	14	15	

1	6	2	3
5	10	7	4
9	11		8
13	14	15	12

1		2	3
5	6	7	4
9	10	11	8
13	14	15	12

1	2	3	4
5	6	7	
9	10	11	8
13	14	15	12

Послѣднее изъ этихъ четырехъ расположеній легко можетъ дать намъ правильное: нужно лишь передвинуть вверхъ камни 8 и 12.

Прежде всего спрашивается, сколько всего возможно задачъ, т. е. сколько различныхъ расположеній можно дать 15 камнямъ, при чемъ предполагается, что въ каждой задачѣ пустая клѣтка, какъ и въ случаѣ правильнаго расположенія, находится справа внизу. Чтобы опредѣлить, сколько перестановокъ можно получить съ помощью 15 предметовъ, начнемъ съ 2 предметовъ a и b. Они могутъ дать лишь двѣ перестановки, а именно ab и ba.

При трехъ же предметахъ уже существуетъ втрое больше перестановокъ, т. е. 6, такъ какъ предметъ a можетъ быть поставленъ передъ bc и передъ cb, и, кромѣ того, имѣются еще двѣ перестановки, начинающіяся съ b, и двѣ, начинающіяся съ c. Отсюда можно заключить далѣе, что четыре предмета a, b, c, d могутъ дать вчетверо большее число различныхъ перестановокъ, т. е. 4. 3. 2=24 различныхъ перестановки. Продолжая такъ, можно найти, что 15 камней такена допускаютъ всего

2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15

перестановокъ. Вычисливъ это произведеніе, мы найдемъ для числа задачъ игры въ такенъ изрядное число въ

1 биллiонъ 307674 милліоновъ и 365000.

Такое же число мы получимъ, понятно, и въ отвѣтъ на вопросъ, сколькими различными способами можетъ размѣститься за столомъ общество изъ 15 лицъ, при чемъ новое расположеніе можетъ выводиться изъ стараго также и перемѣщеніемъ двухъ только лицъ. Если бы такое общество изъ 15 лицъ пожелало сидѣть каждый день въ другомъ порядкѣ, то потребовалось бы свыше 3600 милліоновъ лѣтъ, чтобы исчерпать всѣ возможныя расположенія; даже въ томъ случаѣ, если бы эти 15 лицъ были въ состояніи размѣститься въ новомъ порядкѣ каждую секунду, то имъ пришлось бы работать безпрерывно свыше 41000 лѣтъ, пока не будутъ испробованы всѣ

возможныя перестановки. Этотъ примѣръ даетъ, можетъ быть, нѣкоторое представленіе о размѣрахъ найденнаго числа всѣхъ задачъ такена.

Кто возьмется за рѣшеніе одной изъ этихъ задачъ, скоро будетъ въ состояніи путемъ передвиганія расположить первые 12 камней въ ихъ надлежащихъ мѣстахъ. Но послѣ этого онъ будетъ имѣть въ четвертомъ ряду одно изъ слѣдующихъ 6 положеній:

1) 13, 14, 15; 2) 14, 15, 13; 3) 15, 13, 14;
4) 13, 15, 14; 5) 14, 13, 15; 6) 15, 14, 13.

Затѣмъ опытъ быстро покажетъ, что порядокъ, соотвѣтствующій первому положенію, можетъ также быть достигнутъ во второмъ и третьемъ положеніи при содѣйствіи камней 9, 10, 11, 12 третьяго ряда, при чемъ придется передвигать камень, по меньшей мѣрѣ, 18 разъ; при четвертомъ же, пятомъ и шестомъ положеніяхъ требуемое правильное положеніе не можетъ быть достигнуто. Рѣшеніе такой задачи можетъ быть выполнено лишь съ помощью обмана или фокуса. Рѣшеніе получается лишь такимъ образомъ, что въ какой-либо моментъ вмѣсто передвиганія переставляютъ два камня одинъ на мѣсто другого, что, конечно, является нарушеніемъ правила игры.

Чтобы быть въ состояніи поближе познакомиться съ теоріей такенныхъ задачъ, мы исходимъ изъ слѣдующихъ простыхъ соображеній. Подъ „хо-

домъ“ въ такенѣ мы разумѣемъ перемѣщеніе камня на сосѣднее пустое мѣсто. Если мы сдвинемъ камень съ его первоначальнаго положенія, будемъ передвигать его такъ, чтобы онъ могъ перемѣщаться дальше, и заставимъ его переходить по какимъ угодно путямъ съ какими угодно перерывами, но только такимъ образомъ, чтобы, въ концѣ концовъ, онъ вернулся на свое старое мѣсто, то камень сдѣлаетъ непремѣнно четное число ходовъ, независимо отъ того, какія перемѣщенія совершатъ при этомъ другіе камни. Дѣйствительно, каждому ходу въ горизонтальномъ или вертикальномъ направленіи долженъ соотвѣтствовать въ какой-либо моментъ и въ какомъ-либо мѣстѣ обратный ходъ въ параллельномъ направленіи. Сказанное справедливо не только для камня, но и для пустой клѣтки, такъ какъ послѣдняя при каждомъ ходѣ перемѣщается въ горизонтальномъ или вертикальномъ направленіи на одинъ шагъ впередъ или назадъ. Отсюда вытекаетъ слѣдующая истина: „если путемъ опредѣленныхъ произвольныхъ передвиганій одно положеніе 15-ти камней переводится въ другое положеніе, при которомъ пустое поле занимаетъ свое первоначальное мѣсто, то число всѣхъ ходовъ, сдѣланныхъ при переводѣ перваго положенія въ другое, есть четное число“. При каждомъ такомъ перемѣщеніи можно представлять себѣ, что камень, который первымъ сдвинутъ на нижнее пра-

http://rcheb.ru

вое пустое мѣсто, послѣдовательно мѣняется мѣстомъ со всѣми другими сдвигаемыми камнями. Напримѣръ, исходя изъ основного положенія и передвинувъ послѣдовательно камни:

12, 8, 7, 3, 2, 6, 10, 14, 15, 12,

мы получимъ слѣдующее новое расположеніе:

1	6	2	4
5	10	3	7
9	14	11	8
13	15	12	

Мы можемъ представлять себѣ, что произведенныя перемѣщенія замѣнены рядомъ транспозицій двухъ камней: нужно только вообразить себѣ, что пустое мѣсто постоянно занято камнемъ 12, который первымъ подвергается перемѣщенію. Затѣмъ камень 12 обмѣнивается мѣстомъ сперва съ камнемъ 8, потомъ съ 7, затѣмъ съ 3, съ 2, съ 6, съ 10, съ 14 и, наконецъ, съ 15. При 10 ходахъ произошло, слѣдовательно, 8 транспозицій, т. е. на на 2 транспозиціи меньше, чѣмъ число ходовъ, такъ какъ вдвиганіе камня 12 на пустое мѣсто и удаленіе его оттуда не есть транспозиція двухъ камней,

Но это самое должно имѣть мѣсто и при всякомъ сколь угодно сложномъ передвиганіи: всегда можно сказать, что камень, раньше всѣхъ сдвинутый въ пустое мѣсто, мѣняется мѣстомъ со всѣми другими передвигаемыми камнями. При этомъ число воображаемыхъ транспозицій всегда на 2 меньше, чѣмъ число ходовъ. Такъ какъ число ходовъ, какъ мы видѣли выше, должно быть четное, а число, на 2 меньшее, тоже есть четное, то и число произведенныхъ транспозицій двухъ камней также четное. Вмѣсто того, чтобы начать замѣну съ камня 12, мы можемъ, конечно, начать ее съ какого-нибудь другого передвинутаго камня,—напримѣръ, съ камня 3. Тогда 3 обмѣнивается мѣстомъ съ 2, затѣмъ съ 6, съ 10, съ 14, съ 15, далѣе—въ косомъ направленіи мимо пустой клѣтки—съ 12, затѣмъ съ 8 и, наконецъ, съ 7. Часто въ процессѣ передвиганій камни возвращаются обратно на свои мѣста. Такъ какъ для этого они должны совершить четное число ходовъ, то число транспозицій остается четнымъ, если и не принимать въ разсчетъ тѣхъ транспозицій, которыя произошли отъ камней, возвратившихся на свои прежнія мѣста. Если передвинуть, напримѣръ, исходя изъ правильнаго положенія, послѣдовательно камни

15, 14, 10, 11, 7, 6, 11, 10, 14, 15,

то вмѣсто того, чтобы помѣнять мѣстами 15 съ 14, затѣмъ съ 10, съ 11, съ 7, съ 6, съ 11, съ 10 и,

http://mathem.ru

наконецъ, съ 14, мы можемъ для достиженія новаго положенія ограничиться обмѣномъ мѣстъ 11 съ 7 и затѣмъ 11 съ 6. Но и при этомъ мы тоже получаемъ четное число транспозицій. Итакъ, если два расположенія получаются одно изъ другого посредствомъ передвиганія, то они могутъ быть переведены другъ въ друга также посредствомъ четнаго числа транспозицій двухъ сосѣднихъ камней. Если мы при этомъ совершаемъ транспозиціи не въ томъ именно порядкѣ, который вытекаетъ изъ передвиганія, а въ какомъ-либо другомъ порядкѣ, при которомъ также достигается цѣль, то мы сдѣлаемъ при этомъ, можетъ быть, больше или меньше транспозицій, но это увеличеніе или уменьшеніе выразится четнымъ числомъ, такъ какъ для того, чтобы изъ нѣкотораго даннаго расположенія предметовъ получить снова это же расположеніе, необходимо сдѣлать четное число транспозицій. Отсюда можно вывести слѣдующее заключеніе: „Если нѣкоторое старое положеніе 15 камней такена переводится одними лишь передвиганіями въ новое, при которомъ пустое поле находится на первоначальномъ мѣстѣ, то число транспозицій с м е ж н ы х ъ камней, которыя нужно сдѣлать для того, чтобы получить изъ стараго положенія новое, должно быть „ч е т н о е“.

Транспозицію двухъ несмежныхъ камней,—напримѣръ, при правильномъ расположеніи, камней 2 и 11,—можно замѣнить нѣсколькими транспози-

ціями смежныхъ камней; для этого слѣдуетъ помѣнять одинъ на другой камни 2 и 3, 2 и 7, 2 и 11, затѣмъ еще 7 и 11 и, наконецъ, 7 и 2. Мы видимъ, слѣдовательно, что транспозиція двухъ несмежныхъ камней всегда можетъ быть замѣнена рядомъ транспозицій смежныхъ камней, при чемъ число этихъ транспозицій на 1 меньше удвоеннаго числа ходовъ, которые пришлось бы сдѣлать отъ мѣста перваго камня къ мѣсту второго. Итакъ, то, что достигается при помощи транспозицій несмежныхъ камней, можетъ быть достигнуто и при помощи транспозицій однихъ только смежныхъ камней: придется только увеличить число транспозицій на четное число.

Мы получаемъ, такимъ образомъ, слѣдующій важный результатъ:

Если два расположенія 15 камней такена, приводимыя одно къ другому одними лишь передвиганіями, мы приводимъ другъ къ другу посредствомъ ряда транспозицій паръ какихъ-либо элементовъ, то число совершенныхъ транспозицій всегда будетъ четнымъ.

Полезно подтвердить этотъ результатъ нѣсколькими примѣрами.

1. Исходя изъ основного расположенія камней, подвинемъ на пустое мѣсто камень 12, на освободившееся мѣсто—камень 11, на вновь освободив-

http://rmathesis.ru

шееся мѣсто камень 15 и на мѣсто послѣдняго—камень 12. Можно получить новое расположеніе и такъ, что сперва сдѣлаемъ транспозицію камней 11 и 12, а затѣмъ 12 и 15. Мы произвели двѣ транспозиціи, т. е. четное число транспозицій.

2. Исходимъ изъ основного расположенія и передвигаемъ на освобождающееся каждый разъ мѣсто камни:

12, 11, 10, 14, 15, 10, 14, 9, 13, 15, 10, 14,
9, 10, 15, 13, 10, 9, 11. 12.

Въ результатѣ мы получимъ новое расположеніе:

1	2	3	4
5	6	7	8
10	9	11	12
13	15	14	

Но это новое расположеніе получается изъ стараго также посредствомъ четнаго числа транспозицій, а именно—при помощи транспозицій камней 9 и 10, 14 и 15.

http://mathesis.ru

3. Перевести расположеніе:

1	3	4	7
5	2		8
9	6	11	12
13	14	10	15

въ

1	2	3	4
5	6		7
9	10	11	8
13	14	15	12

Это можетъ быть достигнуто, напримѣръ, посредствомъ ходовъ:

11, 10, 15, 12, 8, 7, 4, 3, 2, 6, 10, 11.

Какимъ бы образомъ мы ни пробовали привести старое положеніе къ новому, заставляя камни обмѣниваться мѣстами, намъ всякій разъ придется совершить четное число обмѣновъ; къ нашей цѣли ведетъ, напримѣръ, послѣдовательный обмѣнъ камней:

15 и 4, 15 и 3, 15 и 10, 10 и 2,
10 и 6, 8 и 4, 8 и 12, 7 и 4.

Всего, какъ видимъ, оказывается 8 обмѣновъ.

Приведенныя разсужденія даютъ также результатъ, обратный относительно изложеннаго. Его можно формулировать слѣдующимъ образомъ

Старое расположеніе 15 камней такена приводимо къ новому или неприводимо, смотря по тому, будетъ ли четнымъ или нечетнымъ число сдѣланныхъ

mathesis.ru

какимъ-либо образомъ обмѣновъ, посредствомъ которыхъ мы также можемъ привести старое положеніе къ новому.

Это правило подтверждается слѣдующими примѣрами.

1. Когда игра въ такенъ получила распространеніе и ею занимались очень многіе, то особенную роль играла слѣдующая задача: дано расположеніе, которое отличается отъ основного только тѣмъ, что въ концѣ камень 15 стоитъ передъ камнемъ 14, и требуется привести это положеніе къ основному. Согласно нашему правилу эта задача неразрѣшима, такъ какъ та же цѣль достигается помощью одного единственнаго обмѣна между двумя камнями, а 1 есть нечетное число. Въ силу этой же причины также неразрѣшимы двѣ задачи, въ которыхъ камни отъ 1 до 12 включительно правильно расположены, а затѣмъ слѣдуютъ камни 14, 13, 15 или 15, 14, 13. Напротивъ, другія двѣ задачи, въ которыхъ камни первыхъ трехъ рядовъ правильно расположены, а въ четвертомъ ряду они слѣдуютъ другъ за другомъ въ порядкѣ

14, 15, 13 или 15, 13, 14,

могутъ быть разрѣшены. Дѣйствительно, основное расположеніе 13, 14, 15 достигается здѣсь посредствомъ 2 транспозицій, а 2 есть четное число.

2. Требуется посредствомъ передвиганія пере-

http://rucheses.ru

вести первое изъ двухъ слѣдующихъ расположеній во второе:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
15	14	13	

въ

4	3	2	1
5	14	13	12
6	15		11
7	8	9	10

Съ помощью нашего второго правила мы сейчасъ же узнаемъ, возможно ли это или невозможно. Передвинемъ сперва камни такъ, чтобы пустая клѣтка была въ обоихъ расположеніяхъ на одномъ и томъ же мѣстѣ; напримѣръ, передвинемъ въ первомъ расположеніи 12 на пустое мѣсто, а на освободившееся послѣ этого мѣсто передвинемъ камень 11. Затѣмъ мы можемъ сдѣлать слѣдующія транспозиціи:

4, 1; 2, 3; 9, 6; 15, 7; 14, 8;
13, 9; 12, 10; 14, 12; 15, 13; 14, 15.

Такъ какъ цѣль можетъ быть достигнута также съ помощью десяти, т. е. четнаго числа, транспозицій, то поставленая задача разрѣшима.

3. Чтобы узнать, можно ли привести положеніе

http://mathesis.ru

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
	15	14	13

къ основному, мы передвигаемъ влѣво 13, 14, 15 такъ, чтобы пустая клѣтка была въ надлежащемъ мѣстѣ. Тогда мы легко найдемъ, что для достиженія правильнаго положенія нужно лишь произвести транспозиціи: 4, 1; 3, 2; 8, 5; 7, 6; 12, 9; 11, 10; 13, 15. Такъ какъ къ цѣли приводятъ 7, т. е. нечетное число, транспозицій, то задача не можетъ быть разрѣшена.

Изъ двухъ доказанныхъ выше правилъ непосредственно вытекаютъ слѣдующія четыре дополнительныхъ правила:

1. Два расположенія, которыя путемъ передвиганія могутъ быть приведены къ одному и тому же третьему, приводимы также другъ къ другу.

2. Два расположенія, которыя о б а н е могутъ быть приведены передвиганіемъ къ одному и тому же третьему, приводимы другъ къ другу.

3. Два расположенія, изъ которыхъ одно можетъ быть приведено передвиганіемъ къ нѣкоторому третьему, а другое не можетъ, неприводимы другъ къ другу передвиганіемъ.

4. Всякое расположеніе, которое не можетъ пе-

рейти въ правильное путемъ передвиганія, станетъ расположеніемъ, которое можетъ быть переведено путемъ передвиганія въ правильное, если мы либо сдѣлаемъ одну транспозицію или нечетное число транспозицій, либо, что то же, сдѣлаемъ скачекъ черезъ одинъ или нечетное число камней.

Если въ такенной задачѣ требуется придти путемъ передвиганія къ основному расположенію, и многіе камни случайно лежатъ на своихъ надлежащихъ мѣстахъ, то можно будетъ очень скоро опредѣлить число транспозицій, необходимыхъ для надлежащаго размѣщенія прочихъ камней: если это число окажется четнымъ, то задача разрѣшима, если же число нечетное, то задача неразрѣшима. Если, однако, въ болѣе запутанной задачѣ на своихъ надлежащихъ мѣстахъ находится очень мало камней или даже нѣтъ ни одного такого камня, то для того, чтобы узнать, разрѣшима ли задача или нѣтъ, пришлось бы сдѣлать много транспозицій. Въ этомъ случаѣ цѣлесообразно располагать транспозиціи, слѣдуя нѣкоторому порядку, въ ряды и такимъ образомъ достигнуть большей наглядности. Слѣдующій примѣръ объяснитъ намъ это.

Предположимъ, что требуется испытать, возможно ли посредствомъ передвиганія перевести первое изъ двухъ слѣдующихъ расположеній во второе:

http://rcin.org.pl

2	4	6	8
5	3	10	12
1	14	11	7
9	13	15	

въ

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Такъ какъ въ первой клѣткѣ вверху слѣва лежитъ камень 2, а потомъ тамъ долженъ находиться камень 1, то мы дѣлаемъ транспозицію этихъ камней, затѣмъ кладемъ камень 2 на то мѣсто, гдѣ лежитъ 4, камень 4 кладемъ на то мѣсто, гдѣ онъ долженъ быть, т. е. въ ту клѣтку, гдѣ находится 8, затѣмъ подобнымъ же образомъ вынимаемъ камни 12, 7, 10, 14, 13, 9, и, наконецъ, 9 кладемъ на мѣсто, въ которомъ первоначально находился камень 1. Такимъ образомъ, камни

1, 2, 4, 8, 12, 7, 10, 14, 13, 9

образуютъ циклъ транспозицій, состоящій изъ 9 транспозицій, въ которыхъ участвуютъ 10 камней. Точно такъ же камни 3 и 6 составляютъ второй циклъ, состоящій изъ одной транспозиціи двухъ камней. Наконецъ, остаются еще три камня, а именно 5, 11, 15, которые лежатъ уже на надлежащихъ мѣстахъ. Мы можемъ, слѣдовательно, сказать, что къ предыдущимъ двумъ цикламъ присоединяются еще три, изъ

коихъ каждый состоитъ изъ 0 транспозицій и 1 камня. Въ каждомъ случаѣ оказывается, слѣдовательно, что число камней, содержащихся въ циклѣ, на единицу больше числа составляющихъ его транспозицій. Въ нашемъ примѣрѣ мы имѣемъ 5 цикловъ, и такимъ образомъ число камней на 5 больше числа транспозицій. Всегда, слѣдовательно, число всѣхъ транспозицій равно разности между числомъ камней и числомъ цикловъ; въ нашемъ примѣрѣ $15 - 5 = 10$. Такъ какъ 10 четное число, то задача разрѣшима. Итакъ, мы выводимъ слѣдующее главное правило:

Одно расположеніе такена можетъ или не можетъ быть приведено передвиганіемъ къ другому, смотря по тому, будетъ ли четнымъ или нечетнымъ числомъ разность между числомъ камней и чисповъ цикловъ, черезъ которые необходимо пройти, чтобы превратить старое расположеніе въ новое.

Это основное правило даетъ возможность наискорѣйшимъ путемъ узнать, разрѣшима ли предложенная такенная задача. Для рѣшенія подобнаго вопроса удобнѣе всего, написавъ рядъ чиселъ, выражающихъ одно расположеніе, подписать подъ нимъ по порядку рядъ чиселъ, выражающихъ то расположеніе, въ которое первое должно быть переведено. Тогда можно быстро и съ увѣренностью узнать на

http://rabochi.ru

взглядъ циклы транспозицій и сообразно съ этимъ рѣшить вопросъ по вышеуказанному правилу. Поясним сказанное слѣдующими примѣрами:

1. Опредѣлить, можно ли посредствомъ передвиганія превратить первое изъ двухъ нижеслѣдующихъ расположеній во второе:

6	8	12	11
5	14	4	1
13	15	2	9
3	10	7	

въ

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Напишемъ другъ подъ другомъ числа, лежащія въ одинаково расположенныхъ клѣткахъ, чтобы легче распознать циклы транспозицій:

6	8	12	11	5	14	4	1	13	15	2	9	3	10	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Теперь мы легко открываемъ три цикла транспозицій:

1. 1, 6, 14, 10, 15, 7, 4, 11, 2, 8;
2. 3, 12, 9, 13;
3. 5.

Если вычтемъ число цикловъ 3 изъ числа камней 15, то получимъ четное число 12. Поэтому

http://mathesis.ru

данныя расположенія могутъ быть приведены одно къ другому посредствомъ передвиганія.

2. Требуется узнать, приводимы ли другъ къ другу два слѣдующихъ расположенія:

14	2	13	1
9	8	3	6
4	7	5	12
11	15	10	

въ

13	5	11	4
14	3	6	8
2	7	1	12
15	10	9	

Выписываемъ оба расположенія, какъ въ первомъ примѣрѣ:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 14 & 2 & 13 & 1 & 9 & 8 & 3 & 6 & 4 & 7 & 5 & 12 & 11 & 15 & 10 \\ \hline 13 & 5 & 11 & 4 & 14 & 3 & 6 & 8 & 2 & 7 & 1 & 12 & 15 & 10 & 9 \end{array}.$$

Отсюда мы находимъ слѣдующіе 5 цикловъ транспозицій:

1. 13, 14, 9, 10, 15, 11;
2. 5, 2, 4, 1;
3. 3, 8, 6;
4. 7;
5. 12.

Разность $15 - 5 = 10$ есть четное число. Поэтому оба предложенныя расположенія могутъ быть приведены одно къ другому посредствомъ передвиганія.

http://mathesis.ru

Наше основное правило даетъ намъ также возможность рѣшить, можно ли при данномъ расположеніи привести камни въ надлежащій порядокъ, хотя бы и не въ то именно расположеніе, которое мы выше назвали правильнымъ. Есть всего 8 расположеній, о которыхъ можно сказать, что числа на камняхъ находятся въ натуральномъ порядкѣ; изъ нашего основного правила легко вывести, что эти 8 расположеній распадаются на двѣ группы по 4 въ каждой и что 4 расположенія каждой группы могутъ быть приведены одно къ другому предвиганіемъ, но расположеніе, относящееся къ одной группѣ, не можетъ быть приведено ни къ одному изъ расположеній второй группы. Это слѣдующія двѣ группы:

http://mathesis.ru

Первая группа.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	

	12	8	4
15	11	7	3
14	10	6	2
13	9	5	1

	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

http://mathesis.ru

Вторая группа.

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
	15	14	13

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
	12	8	4

4	8	12	
3	7	11	15
2	6	10	14
1	5	9	13

13	14	15	
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

Такъ какъ любое расположеніе 15 камней такена, которое не можетъ быть приведено передвиганіемъ къ одному изъ расположеній, указанныхъ въ первой группѣ, непремѣнно будетъ приводимо къ одному изъ расположеній второй группы, то мы можемъ называть разрѣшимой всякую задачу такена, если подъ „рѣшеніемъ“ подразумѣвать приведеніе предписаннаго расположенія посредствомъ передвиганія къ одному изъ вышеприведенныхъ восьми расположеній. Такъ какъ два расположенія второй группы получаются изъ правильнаго

расположенія, если разсматривать его въ зеркалѣ, поставленномъ перпендикулярно къ плоскости такеннаго квадрата и параллельно одной изъ сторонъ его, то мы можемъ также сказать, что любое расположеніе 15 камней можетъ быть приведено путемъ передвиганія къ расположенію, которое либо само есть правильное, либо будетъ правильнымъ, если разсматривать его въ зеркалѣ.

До сихъ поръ мы постоянно предполагали, что 15 камней такена лежатъ въ ящикѣ, въ которомъ могутъ помѣститься 4×4 камня. Но всѣ наши разсужденія относительно транспозицій и цикловъ остаются въ силѣ и въ томъ случаѣ, когда прямоугольный ящикъ можетъ вмѣстить ab камней и содержитъ въ дѣйствительности ab—1 камней. Въ частности выведенное нами въ концѣ основное правило формулировано такимъ образомъ, что его можно примѣнять непосредственно къ этому болѣе общему случаю; это видно изъ нижеслѣдующихъ примѣровъ:

1. Предположимъ, что требуется узнать, приводимо ли передвиганіемъ расположеніе

5	2	8
3	7	6
1	4	

къ расположенію

1	2	3
4	5	6
7	8	

http://mathesis.ru

Пользуясь болѣе удобнымъ начертаніемъ

5	2	8	3	7	6	1	4
1	2	3	4	5	6	7	8

мы получаемъ слѣдующіе четыре цикла транспозицій:

1. 1, 5, 7;
2. 2;
3. 3, 8, 4;
4. 6.

Такъ какъ число камней равно 8 и $8 - 4 = 4$ есть четное число, то оба данныя расположенія приводимы другъ къ другу пеередвиганіемъ.

2. Найти, приводимы ли другъ къ другу слѣдующія два расположенія:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	

къ

1	2	3
16	15	4
17	14	5
18	13	6
19	12	7
20	11	8
	10	9

http://mathesis.ru

Передвинемъ во второмъ расположеніи камни 10 и 9 влѣво, такъ что пустая клѣтка будетъ занимать въ обоихъ расположеніяхъ одно и то же мѣсто: затѣмъ мы напишемъ:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	16	15	4	17	14	5	18	13	6	19	12	7	20	11	8	10	9

Отсюда получаемъ слѣдующіе четыре цикла:

1. 1;
2. 2;
3. 3;
4. 4, 16, 20, 9, 5, 15, 7, 17, 11, 13, 19, 10, 18, 8, 14, 12, 6.

Такъ какъ $20 - 4 = 16$ есть четное число, то оба заданныя расположенія приводимы другъ къ другу передвиганіемъ.

Вскорѣ послѣ изобрѣтенія такена въ Германіи появился варіантъ, соединявшій эту игру съ магическими квадратами (ср. § 19): въ задачахъ этого рода требуется превратить путемъ передвиганія правильное расположеніе въ такое, при которомъ всѣ горизонтальные, вертикальные и діагональные ряды давали бы одинаковую сумму, считая, что въ пустую клѣтку вставлено число 16. Можно замѣтить, что гораздо удобнѣе было бы не брать вовсе въ разсчетъ пустую клѣтку, т. е. представлять себѣ, что въ ней находится число 0. Отъ этого задача по существу не измѣняется, практически же она упро-

стилась бы, такъ какъ не было бы надобности брать еще новый камень для заполненія пустой клѣтки. Магическій квадратъ съ 16 числами отъ 0 до 15 получается проще всего, если вписать эти числа по порядку въ 16 клѣтокъ, но въ тѣхъ восьми клѣткахъ, которыя составляютъ вершины и средину квадрата, писать то число, которое получится при вычитаніи числа, относящагося къ этой клѣткѣ, изъ 15. Такимъ образомъ задача заключается въ приведеніи лѣваго изъ двухъ нижеслѣдующихъ расположеній въ правое:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

въ

15	1	2	12
4	10	9	7
8	6	5	11
3	13	14	

Второй квадратъ магическій, такъ какъ четыре горизонтальные, четыре вертикальные и оба діагональные ряда даютъ одну и ту же сумму 30. Спрашивается, однако, приводимо ли путемъ передвиганія первое расположеніе ко второму. Наше основное правило даетъ намъ на этотъ вопросъ отрицательный отвѣтъ, такъ какъ здѣсь есть 4 цикла транспозицій, а разность 15 — 4 есть нечетное число. Но отсюда мы можемъ, основываясь на изложен-

ныхъ выше соображеніяхъ, заключить, что основное расположеніе можетъ быть превращено передвиганіемъ въ зеркальное изображеніе второго расположенія, т. е. въ расположеніе

12	2	1	15
7	9	10	4
11	5	6	8
	14	13	3

Этотъ квадратъ такъ же, какъ прежній, удовлетворяетъ требованіямъ магическаго квадрата.

Легко также видѣть, что правильное расположеніе 8 камней въ 3×3 клѣткахъ можетъ быть приведено передвиганіемъ къ магическому квадрату съ постоянной суммой 12, а именно расположеніе

1	2	3
4	5	6
7	8	

къ расположенію

3	8	1
2	4	6
7		5

http://mathesis.ru

§ 22.

Вѣчный календарь для дней недѣли и Пасхи.

Къ задачамъ расположенія относится также составленіе наглядныхъ таблицъ, изъ которыхъ безъ вычисленія легко можно узнать, на какой день недѣли приходится или придется какая-либо дата какого угодно года. Авторъ настоящей книги придумалъ подобный календарь, имѣющій весьма простое устройство и извѣстный подъ названіемъ „панхронистъ“. Панхронистъ изготовляется изъ папки или картонной бумаги и содержитъ двѣ подвижныя полосы, снабженныя стрѣлками; одна передвигается слѣва направо, а другая сверху внизъ. Если передвинемъ вторую полосу такъ, чтобы ея стрѣлка указывала на столѣтіе, а первую — такъ, чтобы ея стрѣлка указывала годъ столѣтія, то появляется полный календарь на всѣ дни недѣль соотвѣтствующаго года. Кромѣ того, авторъ устроилъ вѣчный календарь безъ подвижныхъ полосокъ, который даетъ все-таки возможность легко найти съ помощью нѣсколькихъ таблицъ какъ день недѣли любой даты, такъ и даты христіанскихъ праздниковъ любого года. Этотъ вѣчный календарь изданъ Геройль-

домъ въ Гамбургѣ; онъ напечатанъ на папкѣ и можетъ быть подвѣшенъ на стѣнѣ. На слѣдующихъ страницахъ мы приводимъ оттискъ этого календаря *).

*) Въ «Новомъ вѣчномъ календарѣ» (Der neue ewige Kalender. Göschen 1902) автора приняты во вниманіе также и годы до Р. Х.

http://mathesis.ru

A. Вѣчный календарь

Столѣтія стараго стиля:				I.						
0 . .	7 . .	14 . .	.	c	d	e	f	g	a	b
1 . .	8 . .	15 . .	.	b	c	d	e	f	g	a
2 . .	9 . .	16 . .	.	a	b	c	d	e	f	g
3 . .	10 . .	17 . .	.	g	a	b	c	d	e	f
4 . .	11 . .	18 . .	.	f	g	a	b	c	d	e
5 . .	12 . .	19 . .	.	e	f	g	a	b	c	d
6 . .	13 . .	20 . .	.	d	e	f	g	a	b	c
Числа, напечатанныя **жирнымъ** шрифтомъ, обозначаютъ годы, которые являются високосными по стар. и по нов. стилю. Годы, номера которыхъ оканчиваются двумя нулями, по стар. стилю всѣ високосные, по новому же високосные лишь тѣ, номера которыхъ дѣлятся на 400. Въ католич. церкви первый годъ нов. стиля былъ 15 окт. 1582 г., а въ протест. Германіи — 1 марта 1700 г.			Номеръ года въ столѣтіи	00	01	02	03		**04**	05
				06	07		**08**	09	10	11
					12	13	14	15		**16**
				17	18	19		**20**	21	22
				23		**24**	25	26	27	
				28	29	30	31		**32**	33
				34	35		**36**	37	38	39
					40	41	42	43		**44**
				45	46	47		**48**	49	50
				51		**52**	53	54	55	
				56	57	58	59		**60**	61
				62	63		**64**	65	66	67
					68	69	70	71		**72**
				73	74	75		**76**	77	78
				79		**80**	81	82	33	
				84	85	86	87		**88**	89
				90	91		**92**	93	94	95
					96	97	98	99		
26 . .	22	18		a	b	c	d	e	f	g
25 . .	21	17		c	d	e	f	g	a	b
24 . .	20	16		e	f	g	a	b	c	d
23 . .	19	15		f	g	a	b	c	d	e

П р и

1. 1898 (нов. ст.)=d, d Декабрь 25=Воскресенье;
3. 1848 (нов. ст.)=e, e **Январь** 1=Суббота;
5. 800 (ст. ст.) =b, b Декабрь 25=Пятница;

http://rutheis.ru

для дней недѣли.

II.

Янв. въ висок. г.	g	a	b	c	d	e	f
Февр. въ висок. г.	d	e	f	g	a	b	c
Янв. въ прост. г.	f	g	a	b	c	d	e
Февр. въ прост. г.	c	d	e	f	g	a	b
Мартъ	c	d	e	f	g	a	b
Апрѣль	g	a	b	c	d	e	f
Май	e	f	g	a	b	c	d
Іюнь	b	c	d	e	f	g	a
Іюль	g	a	b	c	d	e	f
Августъ	d	e	f	g	a	b	c
Сентябрь	a	b	c	d	e	f	g
Октябрь	f	g	a	b	c	d	e
Ноябрь	c	d	e	f	g	a	b
Декабрь	a	b	c	d	e	f	g
1. 8. 15. 22. 29.	Пн	Вт.	Ср.	Чт.	Пт	Сб.	Вс.
2. 9. 16. 23. 30.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.	Пн.
3. 10. 17. 24. 31.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.	Пн.	Вт.
4. 11. 18. 25.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.
5. 12. 19. 26.	Пт.	Сб	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.
6. 13. 20. 27.	Сб.	Вс	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.
7. 14. 21. 28.	Вс.	Пн	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.

Сокращенія.

Вс=Воскресенье, Пн=Понедѣльникъ, Вт=Вторникъ, Ср=Среда, Чт=Четвергъ, Пт=Пятница, Сб=Суббота.

Ключъ.

Отыщите въ таблицѣ I букву, стоящую на пересѣченіи ряда столѣтія съ рядомъ года Найденную букву разыщите въ таблицѣ II въ строкѣ мѣсяца и идите по вертикальному столбцу внизъ до горизонтальнаго ряда, въ которомъ стоитъ нумеръ даты.

мѣры:

2. 1099 (ст. ст.)=d, d Іюль 15=Пятница;
4. 1970 (нов. ст.)=b, b Сент. 2=Среда;
6. 1572 (ст. ст,)=a, a Августъ 24=Воскресенье.

В. Вѣчный кален

III.

Столѣтія стараго стиля.

19..	0..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20..	1..	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1	2	3	4	5
21..	2..	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
22..	3..	16	17	18	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	4..	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1
	5..	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1	2	3	4	5	6
	6..	12	13	14	15	16	17	18	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	7..	17	18	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	8..	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1	2
	9..	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1	2	3	4	5	6	7
	10..	13	14	15	16	17	18	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	11..	18	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	12..	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1	2	3
	13..	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1	2	3	4	5	6	7	8
	14..	14	15	16	17	18	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	15..	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	16..	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1	2	3	4
	17..	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	18..	15	16	17	18	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Нумеръ года въ столѣтіи →		00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18
		19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
		38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
		57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
		76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94
		95	96	97	98	99														
15..		2	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	1
16..		18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	1	2	14	15	16	17
17..		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	3	4	5	6	7	8	9	10	11
18..		17	18	19	20	21	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
19..		22	23	24	25	26	27	28	29	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20..		27	28	29	30	1	2	3	4	5	6	7	19	9	10	22	23	24	25	26
21..		2	3	4	5	6	7	19	9	10	22	23	24	25	26	27	28	29	30	1

Столѣтія новаго стиля.

Ключъ.

Чтобы опредѣлить дату Пасхальнаго воскресенья для любого года, нужно, съ одной стороны, найти изъ табл. I (календарь дней недѣли) букву года, а, съ другой стороны,—(такимъ же образомъ) отыскать въ таблицѣ III число, соотвѣтствующее году. Искомая дата Пасхи находится въ таблицѣ IV въ томъ мѣстѣ ея, гдѣ вертикальный рядъ буквы, найденной въ табл. I,

дарь праздниковъ.

IV.

	a	b	c	d	e	f	g
1	6	12	11	10	9	8	7
2	**30**	**29**	**28**	**27**	**26**	1	**31**
3	20	19	18	17	16	15	14
4	6	5	4	3	9	8	7
5	**23**	**29**	**28**	**27**	**26**	25	**24**
6	13	12	11	17	16	15	14
7	6	5	4	3	2	1	**31**
8	20	19	25	24	23	22	21
9	13	12	11	10	9	8	14
10	**30**	**29**	**28**	3	2	1	**31**
11	20	19	18	17	16	22	21
12	6	5	11	10	9	8	7
13	**30**	**29**	**28**	**27**	**26**	**25**	**31**
14	13	19	18	17	16	15	14
15	6	5	4	3	2	8	7
16	**23**	**22**	**28**	**27**	**26**	**25**	**24**
17	13	12	11	10	16	15	14
18	**30**	5	4	3	2	**1**	**31**
19	20	19	18	24	23	22	21
20	13	12	11	10	9	8	7
21	**30**	**29**	**28**	**27**	2	1	**31**
22	20	19	18	17	16	15	21
23	6	5	4	10	9	8	7
24	**30**	**29**	**28**	**27**	**26**	**25**	**24**
25	13	12	18	17	16	15	14
26	6	5	4	3	2	1	7
27	20	19	25	24	23	22	21
28	13	12	11	10	9	15	14
29	**30**	**29**	4	3	2	1	**31**
30	20	19	18	17	23	22	21
	a	b	c	d	e	f	g

V.

Пасха	Троицынъ день
Мартъ	Май
22	10
23	11
24	12
25	13
26	14
27	15
28	16
29	17
30	18
31	19
1	20
2	21
3	22
4	23
5	24
6	25
7	26
8	27
9	28
10	29
11	30
12	31
13	1
14	2
15	3
16	4
17	5
18	**6**
19	7
20	8
21	9
22	10
23	11
24	12
25	13
Апрѣль	Іюнь

пересѣкается съ горизонтальнымъ рядомъ числа, взятаго изъ таблицы III, при чемъ числа, напечатанныя **жирными** цифрами, относятся къ марту мѣсяцу, а прочія—къ апрѣлю. Напримѣръ: 1) 1282=b 10=**29** марта; 2) 1898 (нов. ст.)= =d 20=10 апрѣля.

§ 23.

Вѣчный календарь для новолуній и полнолуній.

Астрономія является надежнымъ путеводителемъ при хронологическихъ изысканіяхъ, такъ какъ у всѣхъ народовъ исчисленіе времени основано на движеніяхъ луны и солнца. Къ подраздѣленію времени побудили человѣка прежде всего смѣна дня и ночи и возвратъ временъ года, а затѣмъ также правильное возвращеніе фазъ луны. Въ нашемъ дѣленіи года на двѣнадцать мѣсяцевъ мы имѣемъ еще остатокъ луннаго года, т. е. той формы года, которой нѣкогда пользовались или пользуются еще и теперь китайцы и индусы, евреи, вавилоняне и ассирійцы, сирійцы, арабы и турки, а также множество другихъ народовъ. Но такъ какъ лунный годъ, состоящій изъ 12 лунныхъ обращеній, содержитъ немного больше 354 дней, тогда какъ годъ, т. е. время обращенія земли вокругъ солнца, содержитъ немного болѣе 365 дней, то для перевода даты какого-нибудь происшествія изъ одного времясчисленія въ другое требуются сложныя вычисленія. Но и независимо отъ счисленія времени по лунным годамъ луна часто играетъ важную роль въ разсказахъ о событіяхъ,

—напримѣръ, въ случаяхъ, когда свѣтъ полнолунія благопріятствовалъ или мѣшалъ ночному нападенію. Поэтому опредѣленіе для любого года дней, въ которые наступало новолуніе или полнолуніе, имѣетъ весьма важное значеніе. Въ нижеслѣдующемъ вѣчномъ лунномъ календарѣ авторъ даетъ методъ, съ помощью котораго каждый можетъ легко вычислить дату новолунія или полнолунія для всѣхъ мѣсяцевъ всякаго года любого столѣтія *). Этотъ методъ требуетъ лишь сложенія двухъ чиселъ и вычитанія изъ ихъ суммы нѣкотораго третьяго числа. Эти три числа, соотвѣтствующія столѣтію, году столѣтія и мѣсяцу, напечатаны жирнымъ шрифтомъ въ трехъ таблицахъ луннаго календаря. При пользованіи таблицами нужно руководиться слѣдующими замѣчаніями.

1. Если увеличить или уменьшить на 15 или 44 результатъ, найденный изъ трехъ таблицъ, то получится дата полнолунія.

2. Для 19-го столѣтія (18..) и новаго стиля нѣтъ надобности принимать во вниманіе таблицу столѣтій, такъ какъ при 18.. стоитъ число 0.

3. Для времени до Р. Х. напечатанныя жирнымъ шрифтомъ числа таблицы столѣтій и таблицы годовъ нужно считать отрицательными, такъ что всѣ

*) Въ нѣсколько иной формѣ авторъ составилъ вѣчный лунный календарь еще раньше (см. журналъ «Vom Fels zum Meer» за 1889/90 г.)

http://rcin.org.pl

три ряда чиселъ слѣдуетъ брать со знакомъ минусъ. Затѣмъ найденный отрицательный результатъ слѣдуетъ сперва уменьшить еще на 3, а затѣмъ прибавить $29\frac{1}{2}$, 59 или $88\frac{1}{2}$ для полученія даты новолунія; для полученія же даты полнолунія слѣдуетъ прибавить 15, 44 или 74. Годы до Р. Х слѣдуетъ считать такъ, какъ это принято въ астрономіи, т. е. нужно продолжить мысленно календарь стараго стиля назадъ такимъ образомъ, чтобы первому году нашей эры предшествовалъ годъ, обозначенный цифрой 0; такъ, напримѣръ, годъ 423 до Р. Х. слѣдуетъ считать отмѣченнымъ числомъ минусъ 422.

4. Даты, полученныя посредствомъ таблицъ, отличаются отъ истинныхъ астрономическихъ датъ не болѣе, чѣмъ на половину дня, рѣдко на цѣлый день.

5. Вѣчный лунный календарь имѣетъ силу для многихъ тысячелѣтій до и послѣ Р. Х. Для годовъ столь глубокого прошлаго или отдаленнаго будущаго нужно продолжить таблицу столѣтій, прибавляя сперва $4\frac{1}{2}$, затѣмъ 4, затѣмъ $4\frac{1}{2}$. затѣмъ снова $4\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$ и т. д. Далѣе, при новомъ стилѣ необходимо, кромѣ того, присчитывать 1 всякій разъ, когда столѣтіе смѣняется, оканчиваясь днемъ, не принадлежащимъ високосному году. Если найденное число превышаетъ 29, то необходимо вычесть $29\frac{1}{2}$. Такимъ образомъ, таблица I имѣла бы слѣдующее

продолженіе для новаго стиля: 22.. = **20**$\frac{1}{2}$, 23.. = **25**$\frac{1}{2}$, 24.. = $\frac{1}{2}$, 25.. = **6**, 26.. = **11**, 27.. = **16**$\frac{1}{2}$, 28.. = **21**.

Къ двумъ примѣрамъ, помѣщеннымъ въ ключѣ, прибавимъ еще шесть примѣровъ, относящихся къ историческимъ или астрономическимъ событіямъ.

1. Октябрь 1758 (н. с.) = 24 + 18$\frac{1}{2}$ — 11$\frac{1}{2}$ = 31, 31 — 15 = 16. Октября 16-го 1758 г. было полнолуніе; слѣдовательно, во время ночного нападенія при Гохкирхѣ 14 октября 1758 г. было почти полнолуніе.

2. Январь 1544 = 4$\frac{1}{2}$ + 23 — 3 = 24$\frac{1}{2}$. Января 24 или 25-го 1544 г. было новолуніе. Благодаря этому новолунію произошло полное солнечное затменіе 24 января 1544 г., которое было видимо во всей Германіи.

3. Августъ 1572 = 4$\frac{1}{2}$ + 14 — 9$\frac{1}{2}$ = 9; 9 + 15 = 24. 24-го августа 1572 г. и, слѣдовательно, еще и въ Варфоломееву ночь было полнолуніе.

4. Августъ 1887 (н. ст) = 0 + 28 — 9$\frac{1}{2}$ = 18$\frac{1}{2}$. Отъ 18 до 19 августа было новолуніе. Благодаря этому новолунію случилось солнечное затменіе, наступившее въ утренніе часы 19 августа 1887 г.; оно было полнымъ для Средней Германіи, но, къ сожалѣнію, утро тогда было дождливое.

5. Январь 1077 = 12$\frac{1}{2}$ + 18$\frac{1}{2}$ — 4 = 27; 27 января 1077 г. было новолуніе. Когда Генрихъ IV стоялъ въ Каноссѣ въ одеждѣ кающагося грѣшника (конецъ января 1077 г.), ночи были безлунныя.

http://chess.ru

6. Октябрь года — 2155 = — 1 — $21\frac{1}{2}$ — 3 — $11\frac{1}{2}$ = — 37. Далѣе, — 37 + 59 = 22; 22 октября года — 2155 было новолуніе. Благодаря послѣднему произошло старѣйшее изъ дошедшихъ до насъ солнечныхъ затменій; оно произошло 22 октября — 2155 г. въ царствованіе китайскаго богдыхана Чунгъ-хангa (царствовалъ отъ 2159 г. до 2146 г. до Р. Х.).

http://mathesis.ru

Вѣчный лунный календарь.

I.

Ст. стиль	Вѣкъ	Нов. стиль
28	0 .	
3	1 .	
7	2 .	
11½	3	
16	4	
20	5 . .	
24½	6 .	
29	7 . .	
3½	8 . .	
8	9 .	
12½	10 . .	
16½	11 . .	
21	12 . .	
25½	13 . .	
0	14 . .	
4½	15 .	14½
9	16 . .	19
13	17 . .	24
17½	18 . .	0
22	19 . .	5½
26	20 . .	9½
1	21 . .	15

II.

Номеръ года въ старомъ и новомъ стилѣ

00	19	38	57	76	95	0
01	20	39	58	77	96	18½
02	21	40	59	78	97	7½
03	22	41	60	79	98	26½
04	23	42	61	80	99	15½
05	24	43	62	81		4½
06	25	44	63	82		23
07	26	45	64	83		12½
08	27	46	65	84		1½
09	28	47	66	85		20
10	29	48	67	86		9
11	30	49	68	87		28
12	31	50	69	88		17
13	32	51	70	89		6
14	33	52	71	90		24½
15	34	53	72	91		14
16	35	54	73	92		3
17	36	55	74	93		21½
18	37	56	75	94		11

III.

Мѣсяцъ для стараго и новаго стиля

Январь въ висок. г.	3
Февр. въ висок. г.	4½
Январь въ прост. г.	4
Февр. въ прост. г.	5½
Мартъ	4
Апрѣль	5½
Май	6
Іюнь	7½
Іюль	8
Августъ	9½
Сентябрь . . .	11
Октябрь	11½
Ноябрь . . .	13
Декабрь	13½

По старому стилю високосными считаются тѣ годы, номера которыхъ дѣлятся на 4. По новому стилю високосными считаются тѣ годы, номера которыхъ не оканчиваются двумя нулями и дѣлятся на 4, и кромѣ того еще тѣ годы, номера которыхъ дѣлятся на 400. Всѣ прочіе годы простые. 1900 г. слѣдовательно, считался високосным по старому стилю и простым по нов. Прост. годы содержатъ въ февралѣ 28 дней, висок годы — 29.

Ключъ.

Изъ суммы напечатанныхъ жирными цифрами чиселъ въ таблицѣ I и II, соотвѣтствующихъ вѣку и номеру года, слѣдуетъ вычесть напечатанное въ таблицѣ жирнымъ шрифтомъ число, соотвѣтствующее мѣсяцу. Тогда полученное число, въ случаѣ надобности увеличенное или уменьшенное на 29½, представитъ намъ дату **новолунія**. Напримѣръ:

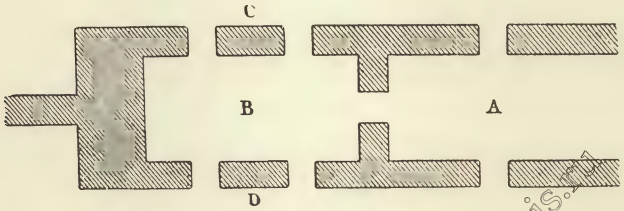
1) Декабрь 1897 г. (нов. стиля) = 0 + + 7½ — 13½ + 29½ = 23½. Новолуніе наступило 23 декабря около 9 часовъ вечера.

2) Августъ 1572 г. = 4½ + 14 — 9½ = 9. 9 августа 1572 г. было новолуніе.

§ 24.

Эйлеровы странствованія.

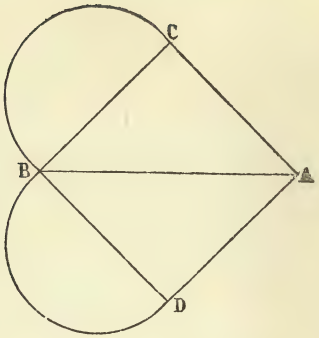
Рѣка Прегель образуютъ въ Кенигсбергѣ островъ, который называется „Кнейпгофомъ“. Черезъ два рѣчные рукава, которые образуютъ этотъ островъ, перекинуты 7 мостовъ; 5 изъ нихъ ведутъ къ самому острову, а 2 перекинуто черезъ рукава выше того мѣста, гдѣ они окружаютъ островъ. Это изображено на прилагаемой фигурѣ, имѣющей скорѣе схематическій, чѣмъ топографическій характеръ; вода здѣсь заштрихована, а суша и мосты не заштрихованы.



Здѣсь B означаетъ островъ, A — мѣстность между обоими рукавами, а C и D мѣстности справа и слѣва отъ этихъ рѣчныхъ рукавовъ. Около 1775 г. былъ поднятъ вопросъ, возможно ли совершить прогулку по Кенигсбергу такимъ образомъ, чтобы пройти

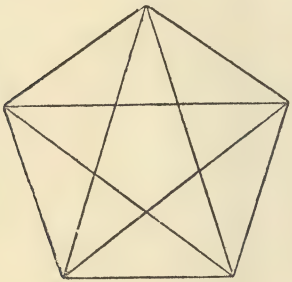
всѣ 7 мостовъ въ какомъ-нибудь послѣдовательномъ порядкѣ, но каждый по одному лишь разу. Нетрудно показать, что это невозможно. Когда Леонардъ Эйлеръ, знаменитый математикъ 18 столѣтія, услышалъ объ этой задачѣ, онъ обобщилъ ее: онъ исходилъ не изъ четырехъ, но изъ произвольнаго числа мѣстностей, между которыми какимъ-угодно образомъ расположены рѣки и мосты. Онъ написалъ объ этомъ работу, которую онъ представилъ въ 1736 г. въ Петербургскую Академію. Такъ какъ въ кенигсбергской задачѣ и подобныхъ ей важна не величина мѣстностей и мостовъ, но лишь многообразіе доступовъ, то для лучшаго обозрѣнія очень удобно замѣнить мѣстности точками, а мосты линіями. Благодаря этому задача о кенигсбергскихъ мостахъ принимаетъ слѣдующую форму: требуется начертить прилагаемую ниже фигуру съ одного почерка, или, что то же, пройти безъ перерыва всѣ 7 линій фигуры такъ, чтобы каждая линія была пройдена одинъ и только одинъ разъ.

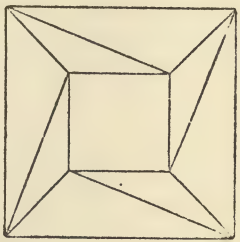
http://mathesis.ru



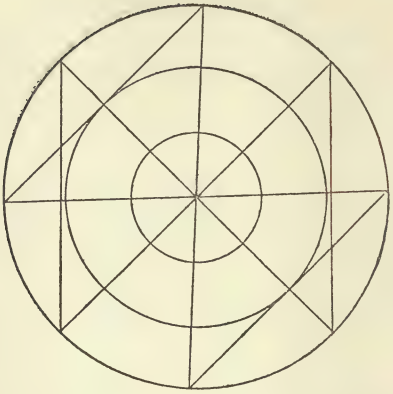
Изъ этой задачи возникли разнообразныя другія, появляющіяся время отъ времени въ журналахъ для развлеченія и повременныхъ изданіяхъ для юношества; въ этихъ задачахъ требуется описать нѣкоторую фигуру однимъ почеркомъ или опредѣленнымъ числомъ почерковъ. Рѣшеніе всѣхъ подобныхъ задачъ чрезвычайно упрощается, если исходить изъ слѣдующаго разсужденія. Каждая точка, которая не есть начальная или конечная точка пути, должна имѣть два выхода, или четыре, или шесть, вообще четное число выходовъ, такъ какъ необходимо придти къ ней и выйти отъ нея. Поэтому, если фигура не обладаетъ ни одной точкой съ нечетнымъ числомъ входовъ, но отъ каждой точки ея выходитъ четное число путей, то фигура непремѣнно можетъ быть очерчена съ одного лишь почерка [14]). Сверхъ того въ этомъ случаѣ любая изъ

точекъ можетъ быть взята за исходную точку, но она должна быть также конечной точкой; такимъ образомъ, на подобной фигурѣ можно совершить замкнутыя круговыя прогулки, при которыхъ каждая точка посѣщается, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ, каждая же линія описывается одинъ и только одинъ разъ. Напримѣръ, всѣ нижеслѣдующія фигуры легко могутъ быть вычерчены разнообразными путями съ одного лишь почерка, такъ какъ во всѣхъ этихъ фигурахъ всѣ точки обладаютъ четнымъ числомъ выходовъ:





http://mathesis.ru

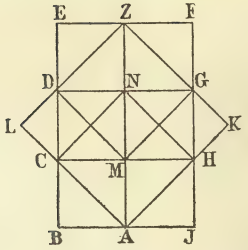


Что касается точекъ съ нечетнымъ числомъ выходовъ, то прежде всего можно показать, что такихъ точекъ всегда должно быть четное число. Чтобы убѣдиться въ этомъ, вообразимъ, что у каждой точки написано число выходовъ изъ нея. Сумма всѣхъ полученныхъ такимъ образомъ чиселъ должна указывать, сколько линій есть на фигурѣ, при чемъ, однако, не слѣдуетъ упускать изъ виду, что каждая линія была принята въ разсчетъ какъ у одного конца ея, такъ и у другого. Поэтому полученная сумма вдвое больше числа всѣхъ линій и, слѣдовательно, есть четное число. Отнимемъ отъ этого четнаго числа всѣ четныя числа, которыя стоятъ при какихъ-либо точкахъ фигуры. Такъ какъ это вычитаніе должно привести снова къ четному числу, то мы доказали, что сумма нечетныхъ чи-

селъ, стоящихъ при точкахъ фигуры, необходимо должна быть четнымъ числомъ. Такъ какъ, наконецъ, отъ нечетнаго числа необходимо вычитывать всякій разъ четное число, чтобы дойти до 1, то число точекъ съ нечетнымъ числомъ выходовъ должно быть ч е т н ы м ъ.

Теперь разсмотримъ сперва фигуру, обладающую, помимо такихъ точекъ, изъ которыхъ исходитъ четное число путей, лишь двумя еще точками, имѣющими нечетное число выходовъ. Въ этомъ случаѣ ни одна изъ этихъ двухъ точекъ не можетъ служить промежуточной станціей при движеніи по линіямъ этой фигуры, ибо, дойдя до промежуточной точки по нѣкоторому пути, мы должны непремѣнно уйти изъ нея по другому пути, что̀ возможно лишь при четномъ числѣ выходовъ. Отсюда слѣдуетъ, что одна изъ двухъ точекъ съ нечетнымъ числомъ выходовъ должна служить начальной станціей, а другая — конечной. Напримѣръ, слѣдующая фигура можетъ быть очерчена съ одного почерка различными путями, но при непремѣнномъ условіи, чтобы одна изъ точекъ A и Z была начальной, а другая — конечной:

http://mathesis.ru



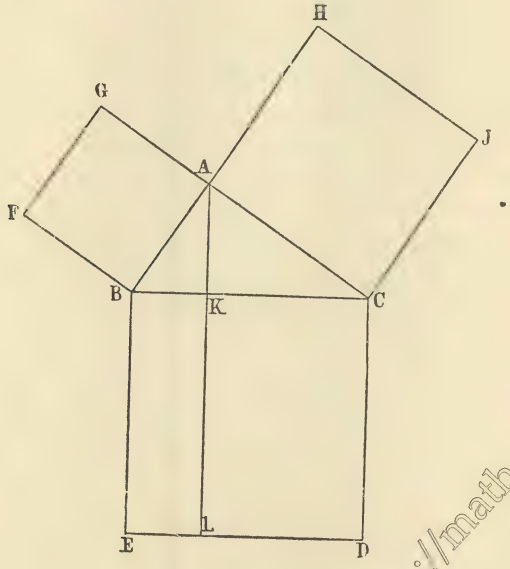
Однимъ изъ возможныхъ рѣшеній является, напримѣръ, путь:

ABCDEZFGHJAHKGZDLCAMCNDMNHMGNZ.

Такимъ же образомъ нетрудно понять, что фигура, содержащая 4 точки съ нечетнымъ числомъ выходовъ, не можетъ быть очерчена съ одного почерка: ее можно описать лишь двумя непрерывными линіями, при чемъ изъ этихъ четырехъ точекъ двѣ должны быть начальными, а другія двѣ—конечными. Вообще, можно доказать, что всякая фигура можетъ быть очерчена столькими непрерывными линіями, сколько единицъ содержится въ половинѣ всего числа точекъ, обладающихъ нечетнымъ числомъ выходовъ. Примѣняя это правило къ задачѣ о кенигсбергскихъ мостахъ, мы замѣчаемъ, что изъ четырехъ точекъ A, B, C, D относящейся къ этой задачѣ схематической фигуры точка B имѣетъ пять выходовъ, а каждая изъ трехъ остальныхъ точекъ — по три выхода. Отсюда мы заключаемъ, что семь

кенигсбергскихъ мостовъ могутъ быть пройдены лишь въ два обхода и непремѣнно при различныхъ начальныхъ и конечныхъ пунктахъ, если требуется пройти каждый мостъ лишь одинъ разъ; напримѣръ, однимъ изъ рѣшеній являются два обхода C A B и D B C B D A.

Другимъ примѣромъ послужитъ фигура Пиѳагоровой теоремы съ необходимымъ для доказательства перпендикуляромъ изъ вершины A на сторону DE.



http://mathesis.ru

Такъ какъ лишь точки A и L имѣютъ нечетное число выходовъ, то фигура можетъ быть очерчена одной непрерывной линіей, если начнемъ съ точки A и кончимъ въ точкѣ L, или наоборотъ. Напримѣръ, фигура можетъ быть описана съ одного почерка по пути

LKAGFBELDCJHACKBA.

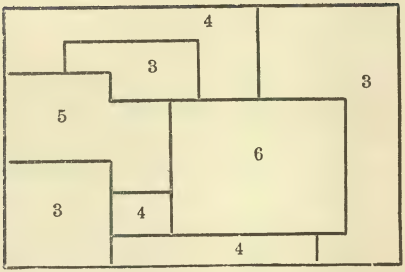
Чтобы опредѣлить въ заключеніе, сколькими непрерывными линіями можно начертить фигуру шахматной доски, замѣтимъ, что изъ 81 точки этой фигуры 4 вершины имѣютъ два выхода, а 49 внутреннихъ точекъ имѣютъ каждая по четыре выхода; остаются лишь четыре раза семь точекъ, лежащихъ на краяхъ и не служащихъ вершинами большого квадрата; онѣ имѣютъ по три выхода, т. е. нечетное число выходовъ. Такъ какъ половина числа 4×7 есть 14, то для полученія фигуры шахматной доски необходимо провести, по меньшей мѣрѣ, четырнадцать непрерывныхъ линій.

Является еще вопросъ, какимъ образомъ слѣдуетъ проходить линіи данной фигуры, чтобы каждая линія была дѣйствительно пройдена одинъ разъ. Это очень просто. Отмѣтивъ себѣ точки съ нечетнымъ числомъ выходовъ и принявъ ихъ за начальныя и конечныя точки путей, слѣдуетъ сперва соединить какимъ-либо образомъ каждую начальную точку съ конечной. Послѣ этого останутся лишь

замкнутые въ себѣ пути. Послѣдніе очень легко можно затѣмъ ввести въ одинъ изъ начерченныхъ уже незамкнутыхъ путей.

Изъ разнородныхъ формъ, какія даны были задачамъ, вышедшимъ изъ задачи о кенигсбергскихъ мостахъ, особаго вниманія заслуживаютъ двѣ. Въ одной точки замѣнены странами, а линіи — границами между этими странами. Такъ, континентъ изъ восьми странъ, расположенныхъ другъ по отношенію къ другу такимъ же образомъ, какъ изображенныя на фигурѣ (стр. 310) восемь частей прямоугольника, можно было бы объѣхать въ два пріема при условіи, чтобы каждая граница между двумя странами была пройдена одинъ разъ Что для этого требуется, по крайней мѣрѣ, два путешествія, слѣдуетъ изъ того, что ч е т ы р е изъ восьми странъ имѣютъ нечетное число границъ съ другими странами. Числа, написанныя внутри частей фигуры, показываютъ, со сколькими она граничитъ другими частями.

Вторая задача переноситъ въ пространство трехъ измѣреній результаты, относящіеся къ плоскости. Вмѣсто точекъ и линій плоскости разсматриваются тѣла, состоящія изъ граней, реберъ и вершинъ. Задача состоитъ въ томъ, чтобы пройти по всѣмъ ребрамъ, но каждое лишь по одному разу. При этомъ за станціи можно принять либо вершины, либо грани. Въ зависимости отъ этого придется разсмотрѣть, изъ какихъ вершинъ исходитъ нечетное



число реберъ, или какія грани обладаютъ нечетнымъ числомъ сторонъ. Кубъ, напримѣръ, имѣетъ восемь вершинъ, изъ коихъ въ каждой сходятся три ребра, и шесть граней содержащихъ каждая по четыре ребра. Поэтому двѣнадцать реберъ куба могутъ быть пройдены не меньше, чѣмъ въ четыре хода, если двигаться по ребрамъ, т. е. если въ качествѣ станцій при переходѣ отъ одного ребра къ другому пользоваться вершинами. Если же для перехода отъ одного ребра къ другому пользоваться гранями, то достаточно одного лишь странствованія, чтобы одинъ разъ перейти черезъ каждое ребро.

http://mathesis.ru

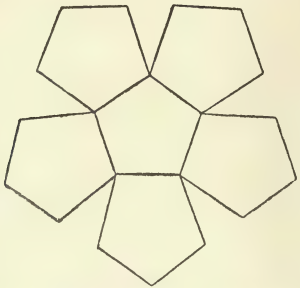
§ 25.

Гамильтоновы круговыя поѣздки.

Въ 1859 г. въ Лондонѣ появились двѣ головоломныя игры, авторомъ которыхъ былъ знаменитый математикъ Гамильтонъ, творецъ теоріи кватерніоновъ. Одна игра называлась: „путешественники по додекаедру или кругосвѣтное путешествіе“, другая— „игра въ икосаедръ“. Обѣ игры по существу не отличаются другъ отъ друга и имѣютъ внѣшнее сходство съ разсмотрѣнными въ § 24 „Эйлеровыми странствованіями“, но при ближайшемъ разсмотрѣніи оказывается, что съ послѣдними онѣ не имѣютъ ничего общаго. Въ игрѣ въ додекаедръ требуется, двигаясь по ребрамъ додекаедра, пройти черезъ 20 вершинъ его и, пройдя каждую одинъ лишь разъ, вернуться въ концѣ къ исходному пункту. Не изучавшій геометріи можетъ получить представленіе о додекаедрѣ проще всего слѣдующимъ путемъ: вообразимъ, что пять наружныхъ пятиугольниковъ прилагаемой фигуры (стр. 312) перегнуты кверху вдоль реберъ внутренняго пятиугольника, а на полученную такимъ образомъ коробку поставлена другая точно такая же, и при томъ такъ, чтобы на самомъ верху горизонтально лежалъ внутренній пятиугольникъ второй коробки,

http://rutracker.ru

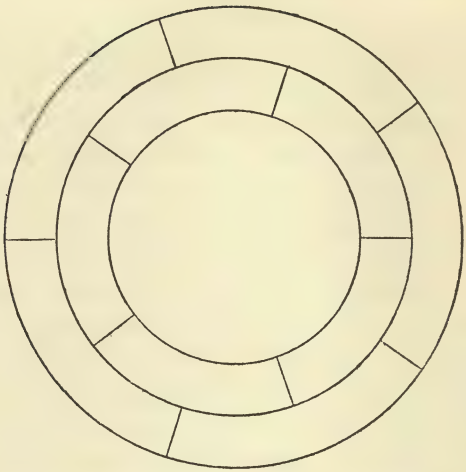
а верхнія ребра нижней коробки совпадали съ нижними ребрами верхней.



Образовавшееся такимъ образомъ тѣло ограничено двѣнадцатью пятиугольниками, такъ что получаются двадцать вершинъ; отъ каждой изъ нихъ исходятъ три ребра, и, слѣдовательно, также три грани. Число всѣхъ реберъ тридцать. Такъ какъ это тѣло имѣетъ исключительно равныя ребра и равные углы между каждыми двумя смежными гранями, то оно принадлежитъ къ числу пяти правильныхъ многогранниковъ. Правильный икосаедръ, отъ имени котораго получила свое названіе вторая игра, предложенная Гамильтономъ, такъ ограниченъ двадцатью равносторонними треугольниками, что получаются двѣнадцать вершинъ, изъ коихъ каждая есть пересѣченіе пяти граней и, слѣдовательно, также пяти реберъ. Додекаедръ и икосаедръ противопоставляются другъ другу въ томъ смыслѣ, что одно изъ этихъ тѣлъ находится въ такомъ же отношеніи къ

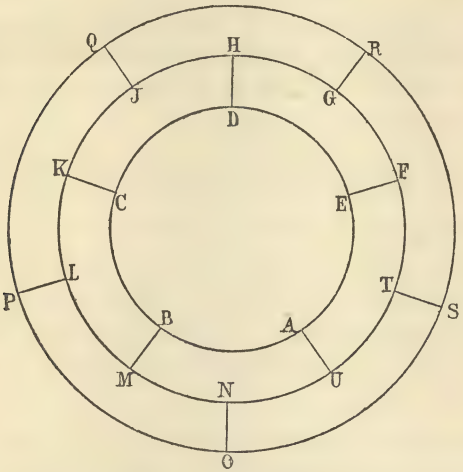
своимъ гранямъ, въ какомъ другое — къ своимъ ребрамъ. Игра въ икосаедръ требуетъ, чтобы играющій посѣтилъ двадцать граней правильнаго икосаедра, но каждую грань лишь одинъ разъ, при чемъ переходъ отъ одной грани къ сосѣдней долженъ совершаться непремѣнно черезъ общее ребро ихъ. Въ силу указанной выше связи между додекаедромъ и икосаедромъ игра въ икосаедръ по существу не отличается отъ игры въ додекаедръ. Въ дальнѣйшемъ мы разсмотримъ поэтому только игру въ додекаедръ. Брать каждый разъ въ руки модель правильнаго додекаедра для совершенія прогулки по сѣти реберъ этого тѣла представляется неудобнымъ, вслѣдствіе чего мы замѣнимъ эту сѣть плоской фигурой, обладающей всѣми тѣми свойствами поверхности додекаедра, которыя являются существенными для нашей игры. Такъ какъ въ игрѣ требуется посѣтить, странствуя по ребрамъ, всѣ двадцать вершинъ и при томъ каждую лишь одинъ разъ, то эту игру можно также вести по линіямъ всякой фигуры, составленной изъ двадцати точекъ и тридцати соединительныхъ линій такимъ образомъ, что изъ каждой точки выходятъ ровно три линіи и эти линіи ограничиваютъ двѣнадцать пятиугольниковъ. При этомъ линіи могутъ быть прямыми или кривыми. Сообразно съ этимъ мы замѣнимъ сѣть реберъ правильнаго додекаедра слѣдующей легко вычерчиваемой фигурой (стр. 314):

http://rutracker.ru



Какъ видимъ, эта фигура состоитъ изъ трехъ концентрическихъ окружностей, изъ которыхъ средняя соединена какъ съ внутренней, такъ и съ наружной пятью поперечными прямолинейными отрѣзками. Подобно поверхности додекаедра эта фигура содержитъ въ 12 пятиугольникахъ 20 точекъ, соединенныхъ одна съ другой посредствомъ 30 линій, при чемъ изъ каждой точки выходятъ три линіи. Послѣ нѣсколькихъ испытаній легко удается обойти мысленно линіи нашей фигуры такимъ образомъ, чтобы посѣтить каждую точку по одному разу, и чтобы конечная точка совпала съ начальной. Гамильтонъ, однако, ставитъ съ самаго начала до-

полнительное требованіе, а именно, чтобы первыя пять станцій были напередъ указаны. При такомъ



ограниченіи задача можетъ быть рѣшена, смотря по выбору 5 станцій, двумя или четырьмя способами (см. фиг. на этой страницѣ).

Напримѣръ, если въ прилагаемой фигурѣ первыя пять станцій суть A, B, C, D и E, то задачу легко рѣшить, идя далѣе слѣдующимъ путемъ: FGHJKLMNOPQRSTUA.

Въ другой задачѣ, предложенной Гамильтономъ, задаются произвольно три первыя станціи и конечная станція, не совпадающая съ начальной, но основное требованіе, согласно которому каждая

http://rmathesis.ru

станція должна быть посѣщена одинъ только разъ, остается въ силѣ. Эта вторая задача приводитъ въ зависимости отъ выбора четырехъ задаваемыхъ станцій къ 0, 1, 2, 4 или 6 рѣшеніямъ. Напримѣръ, задача имѣетъ одно лишь рѣшеніе, если заданы начальныя станціи A, B и C и конечная Q. Это рѣшеніе слѣдующее:

ABCDEFTUNMLKJHGRSOPQ.

Если заданы эти же самыя начальныя станціи, но другая конечная станція, то получаются 2, 4 или 6 рѣшеній, исключая тѣ случаи, когда конечной станціей служитъ одна изъ слѣдующихъ: K, D, F, P, M, N и T; въ этихъ случаяхъ задача не имѣетъ ни одного рѣшенія.

Въ третьей разновидности своей задачи Гамильтонъ считаетъ заданными нѣсколько послѣдовательныхъ начальныхъ станцій и требуетъ, чтобы послѣ напередъ указаннаго числа послѣдующихъ станцій оказалось невозможнымъ продолжать путь, не нарушая правила, по которому въ каждой станціи слѣдуетъ побывать лишь одинъ разъ. Напримѣръ, если заданы четыре начальныя станціи T, S, R и Q и требуется, чтобы послѣ шести дальнѣйшихъ станцій продолженіе поѣздки оказалось невозможнымъ, то получается рѣшеніе:

TSRQJHDEFG.

Наконецъ, четвертая разновидность игры состояла въ томъ, что одна напередъ указанная станція должна была быть исключена при поѣздкѣ. Напримѣръ, если заданы три первыя станція A, B, C, конечная станція D и, кромѣ того, требуется, чтобы пунктъ M былъ исключенъ, то получаются два рѣшенія, изъ коихъ одно есть слѣдующее:

A B C K L P Q J H G R S O N U T F E D.

Однако, въ своемъ первоначальномъ видѣ задача не содержала подобныхъ отягчающихъ условій, но требовала лишь, чтобы каждая станція была посѣщена одинъ разъ, и чтобы конечный пунктъ пути совпалъ съ первоначальнымъ. Задача въ такомъ видѣ допускаетъ изящную метематическую обработку, которую далъ самъ Гамильтонъ на собраніи Британской Ассоціаціи въ 1857 г. и которая основана на слѣдующихъ соображеніяхъ. Достигнувъ нѣкоторой станціи, мы для дальнѣйшей поѣздки всегда имѣемъ на выборъ два пути, такъ какъ станція имѣетъ всего три выхода. По отношенію къ тому направленію, въ которомъ мы прибыли къ данной станціи, одинъ изъ этихъ двухъ путей идетъ направо, другой—налѣво. Если изберемъ путь вправо, то отмѣтимъ это буквой r, если же мы дальше пойдемъ лѣвымъ путемъ, то выразимъ это черезъ l. Такимъ образомъ, всякая круговая поѣздка можетъ быть выражена 20 буквами, которыя

суть либо r, либо l. Напримѣръ, первая указанная круговая поѣздка, въ которой буквы идутъ въ алфавитномъ порядкѣ, будетъ представлена слѣдующимъ образомъ:

rrrlllrlrlrrrlllrlrl.

Такъ какъ конечный пунктъ долженъ всегда совпадать съ начальнымъ, то изъ этого ряда, начинающагося съ rrr, можно вывести различные другіе ряды, для чего нужно лишь начать съ любой буквы этого ряда и первую букву его разсматривать, какъ идущую за послѣдней. Точно такъ же каждый такой рядъ можно читать и въ противоположномъ направленіи. Такимъ способомъ можно, какъ доказалъ Гамильтонъ, изъ одного приведеннаго рѣшенія, признаннаго правильнымъ, вывести всѣ остальныя возможныя рѣшенія. Напримѣръ, если произвольно заданы пять начальныхъ станцій, то онѣ указываютъ намъ направленіе, которое нужно выбрать, покидая вторую станцію, затѣмъ третью и, наконецъ, четвертую. Дѣйствительно, возможно встрѣтиться лишь съ однимъ изъ слѣдующихъ восьми случаевъ, относящихся къ пяти первымъ станціямъ:

rrr, rrl, rlr, rll, lrr, lrl, llr, lll.

Но каждую изъ этихъ восьми группъ можно взять изъ предыдущаго ряда, начинающагося груп-

http://mathesis.ru

пой rrr) и принять за начальную группу ряда, при чемъ нетрудно видѣть, что группой rrr начинается и вышеприведенный рядъ и прямо ему противоположный [15]). Если мы начнемъ съ группы rrr, которая слѣдуетъ за срединой ряда, то не получимъ никакого новаго ряда, но лишь вторично получимъ старый рядъ, такъ какъ вторая половина ряда совершенно тождественна съ первой. Два полученные ряда, начинающіеся группой rrr, даютъ намъ непосредственно оба возможныя рѣшенія задачи для того случая, когда пять начальныхъ станцій расположены въ порядкѣ послѣдовательности, указываемой группой rrr. Если, во-вторыхъ, началомъ служитъ rrl, то опять получаются два ряда, дающіе оба возможныя рѣшенія для того случая, когда расположеніе пяти начальныхъ станцій соотвѣтствуетъ символу rrl, напримѣръ, для случая A B C D H. Точно такъ же есть два ряда, начинающіеся группой rll. Такъ какъ при замѣнѣ буквы r на l и обратно первоначальный циклъ превращается въ противоположный ему, то группа lll даетъ намъ то же самое, что и группа rrr, группа llr — то же, что rrl, и lrr — то же, что и rll. Остаются поэтому лишь начала rlr и lrl, которыя также даютъ намъ одно и то же и приводятъ каждое къ четыремъ рѣшеніямъ. Четыремъ рѣшеніямъ, начинающимся съ rlr, соотвѣтствуютъ, напримѣръ, пять начальныхъ станцій A, B, C, K, J и четыре круговыя поѣздки.

1. A B C K J Q R G H D E F T S O P L M N U A;
2. A B C K J H D E F G R Q P L M N O S T U A;
3. A B C K J Q R S O P L M N U T F G H D E A;
4. A B C K J Q P L M N O S R G H D E F T U A.

Такимъ образомъ, по расположенію пяти заданныхъ начальныхъ станцій можно сейчасъ же узнать, возможно ли 2 или 4 круговыя поѣзки. Изъ нашего первоначальнаго цикла

r r r l l l r l r l r r r l l l r l r l

можно также узнать, въ какихъ случаяхъ удается круговая поѣздка съ шестью или еще бо́льшимъ числомъ заданныхъ начальныхъ станцій. При шести заданныхъ станціяхъ дѣло зависитъ отъ того, дѣлаемъ ли мы такіе повороты при прохожденіи четырехъ среднихъ станцій, чтобы сдѣланные четыре поворота входили въ предыдущій циклъ при чтеніи его слѣва направо или справа налѣво. Но изъ буквъ r и l можно составить 16 группъ по четыре буквы въ каждой; изъ числа этихъ 16 группъ 12 имѣются въ нашемъ циклѣ, а 4 не имѣются. Эти четыре группы слѣдующія:

r r r r, r l l r, l r r l, l l l l.

Изъ этихъ четырехъ группъ двѣ группы r r r r и l l l l естественно не могутъ входить въ нашъ циклъ, ибо эти группы относятся къ обходу пятиугольника, такъ что первая начальная станція явля-

mathesis.ru

ется также шестой. Остаются лишь еще два такихъ случая rllr и lrrl, въ которыхъ круговая поѣздка невозможна. Первый изъ этихъ случаевъ имѣетъ мѣсто, напримѣръ, когда въ качествѣ первыхъ шести станцій заданы слѣдующія: A, B, C, K, L и P. Невозможность такъ начинающейся круговой поѣздки видна также изъ того, что при подобномъ началѣ поѣздки нельзя было бы выбраться изъ станціи M. Дѣйствительно, изъ трехъ сосѣднихъ съ ней станцій B, L и N станціи B и L уже пройдены раньше, такъ что къ станціи M можно было бы прибыть лишь изъ N, послѣ чего уже нельзя было бы продолжать поѣздку. [16])

Съ помощью нашего цикла очень легко опредѣлить также число возможныхъ круговыхъ поѣздокъ въ тѣхъ случаяхъ, когда задано меньше, чѣмъ пять начальныхъ станцій. Слѣдующая таблица показываетъ, сколько рѣшеній возможно при томъ или другомъ числѣ заданныхъ начальныхъ станцій:

Число начальныхъ станцій:	Число рѣшеній:
8, 9, 10	1 или 0;
7	2 или 1 или 0;
6	3 или 2 или 1 или 0;
5	4 или 2;
4	6 или 4;
3	10;
2	20;
1	30.

http://mathesis.ru

Является вопросъ, нельзя ли съ помощью Гамильтонова метода, посредствомъ котораго изъ одного рѣшенія легко получаются всѣ остальныя, теоретически развить также исходное рѣшеніе. Утвердительный отвѣтъ на этотъ вопросъ слѣдуетъ изъ нѣкоторыхъ соотношеній между группировками буквъ l и r, вытекающихъ изъ природы нашей основной фигуры, состоящей изъ 12 пятиугольниковъ. Легко усмотрѣть, что мы всякій разъ будемъ возвращаться къ одной и той же исходной точкѣ безразлично, пойдемъ ли мы два раза подъ рядъ влѣво, или же сперва пойдемъ вправо, затѣмъ три раза влѣво и, наконецъ, опять вправо. Напримѣръ, изъ точки U мы приходимъ черезъ A и B въ M, при чемъ мы поворачиваемъ два раза влѣво. Но къ той же точкѣ M мы можемъ придти и черезъ A, E, D, C, B, поворачивая сперва вправо, затѣмъ три раза влѣво и, наконецъ, вправо. Это явленіе можно выразить символически слѣдующимъ образомъ:

$$ll = rlllr.$$

Точно такъ же мы можемъ убѣдиться въ справедливости слѣдующаго равенства:

$$lrl = rllr.$$

Замѣнивъ букву r черезъ l и обратно, мы получимъ изъ этихъ двухъ соотношеній два другихъ. Этими соотношеніями можно воспользоваться для того, чтобы

http://rarethesis.ru

изъ одной понятной безъ разъясненій круговой поѣздки по пяти лишь станціямъ вывести циклы, относящіеся ко всѣмъ двадцати станціямъ. Если мы обойдемъ всѣ стороны одного изъ пятиугольниковъ, составляющихъ нашу фигуру, то мы возвратимся къ начальной точкѣ, либо поворачивая пять разъ подъ рядъ влѣво, либо пять разъ вправо. Исходя изъ этого факта, мы можемъ путемъ повторнаго пользованія соотношеніемъ $ll = rllll$ вывести теоретически одинъ циклъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned}
&(ll)\ lll = (rllll)\ lll \\
&= (rrllllrlr)\ (rllll) \\
&= (rrrlllrlrlr)\ (rrllllrlrl) \\
&= rrrllllrlrlrrrllllrlrl.
\end{aligned}$$

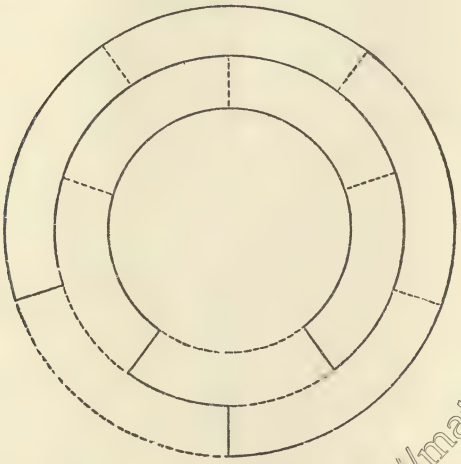
Изъ какого бы мы ни исходили соотношенія и какимъ бы образомъ мы ни производили подстановки, всякій разъ, какъ только у насъ наберется 20 буквъ, мы получаемъ группу, которая или отличается отъ только-что найденной лишь тѣмъ, что начинается съ другого пункта, но циклически тождественна съ ней, или же отличается лишь противоположнымъ направленіемъ. Это находится въ согласіи съ тѣмъ обстоятельствомъ, что не существуетъ никакихъ другихъ рѣшеній, кромѣ тѣхъ, которыя вытекаютъ изъ нашего цикла.

Кромѣ Гамильтона, французскій артиллерійскій офицеръ Гермари (Hermary) предложилъ

методы, которые приводятъ ко всѣмъ рѣшеніямъ задачи Гамильтона; однако, изложеніе этихъ методовъ потребовало бы здѣсь слишкомъ много мѣста.

О расширеніи Гамильтоновой задачи о круговыхъ поѣздкахъ думалъ еще, конечно, Гамильтонъ и, кромѣ него, Гермари, Люка (Lucas) и Боллъ (Ball). Но до сихъ поръ еще не удалось развить математической теоріи нахожденія всѣхъ круговыхъ поѣздокъ, которыя можно совершить по фигурѣ, составленной произвольнымъ образомъ изъ точекъ и линій. Однако же авторъ настоящей книги нѣсколько лѣтъ тому назадъ далъ въ журналѣ „Naturwissenschaftliche Wochenschrift“ способъ, значительно облегчающій эмпирическое нахожденіе круговыхъ поѣздокъ, при которыхъ каждая станція посѣщается лишь одинъ разъ. Чтобы познакомиться съ этимъ методомъ, мы опять будемъ исходить изъ нашей прежней основной фигуры, содержащей три концентрическія окружности. Она состоитъ изъ 30 отрѣзковъ; при круговой поѣздкѣ приходится проѣзжать по 20 изъ нихъ, остальные же 10 отрѣзковъ остаются въ сторонѣ. Если мы помѣтимъ 20 пройденныхъ отрѣзковъ, чтобы имѣть возможность отличить ихъ отъ 10 непройденныхъ, то мы замѣтимъ, что изъ каждой точки исходятъ два помѣченныхъ отрѣзка и одинъ непомѣченный. Задача состоитъ, слѣдовательно, въ томъ, чтобы отобрать изъ 30 линій 10 такимъ образомъ, чтобы изъ каждой

точки выходила одна линія и при томъ только одна; на практикѣ легко увидѣть, что это можно выполнить (10 + 20) различными способами. Выбрать тѣ линіи, по которымъ не приходится двигаться, легче, конечно, чѣмъ тѣ, которыя придется проѣзжать, такъ какъ 10 меньше 20. Напримѣръ, въ приложенной фигурѣ представлена первая изъ разсмотрѣнныхъ нами круговыхъ поѣздокъ, въ которой пройденныя станціи слѣдуютъ одна за другой въ алфавитномъ порядкѣ: десять непройденныхъ отрѣзковъ начерчены пунктиромъ, самый же круговой путь представленъ непрерывной линіей.



Десять пунктирныхъ отрѣзковъ, т. е. тѣ, по которымъ не нужно проходить, могутъ быть вы-

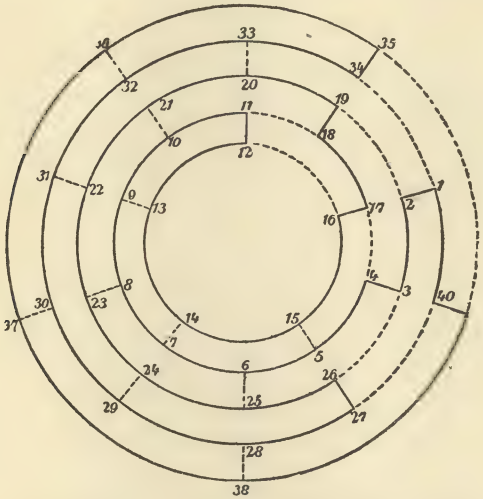
http://mathesis.ru

браны, конечно, различнымъ образомъ; нетрудно, однако, увидѣть, что этотъ выборъ можетъ быть сдѣланъ лишь двумя или четырьмя различными способами, если намъ заданы пять начальныхъ точекъ; это согласно съ результатомъ, къ которому привелъ насъ методъ Гамильтона.

Этотъ способъ легко можно распространить на любыя фигуры. При каждой точкѣ пишемъ число исходящихъ изъ нея отрѣзковъ. Половина суммы всѣхъ отмѣченныхъ такимъ образомъ чиселъ представитъ намъ каждый разъ точное число всѣхъ входящихъ въ фигуру отрѣзковъ. Если изъ этого числа вычтемъ число всѣхъ точекъ фигуры, то получимъ число тѣхъ отрѣзковъ, по которымъ не нужно проходить. Столько именно отрѣзковъ мы и отмѣчаемъ, какъ „запрещенные“, при чемъ мы должны соблюдать два условія: во-первыхъ, число запрещенныхъ отрѣзковъ, исходящихъ изъ каждой точки, должно быть на 2 меньше числа, которымъ помѣчена соотвѣтственная точка; во-вторыхъ, полученная такимъ образомъ круговая поѣздка не должна распадаться на двѣ или бо́льшее число замкнутыхъ круговыхъ поѣздокъ.

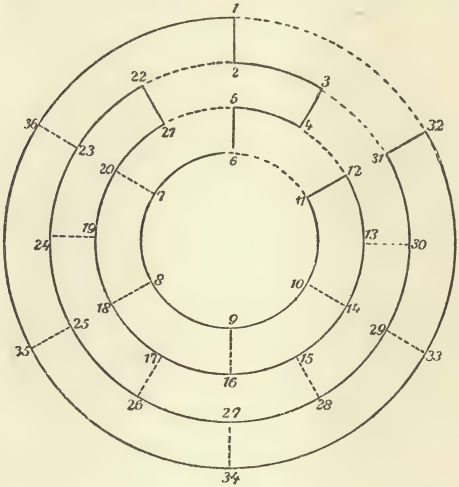
Если каждая точка, какъ при игрѣ въ додекаедръ, имѣетъ три выхода, то изъ каждой точки долженъ выходить только одинъ запрещенный отрѣзокъ. Это имѣетъ, напримѣръ, мѣсто въ нижеслѣдующей фигурѣ; здѣсь 40 точекъ связаны между

собой 60-ью отрѣзками, 20 запрещенныхъ отрѣзковъ изображены попрежнему пунктиромъ, а получающійся отсюда однозначно круговой маршрутъ начерченъ непрерывной линіей и, кромѣ того, для большей ясности отмѣченъ числами въ натуральномъ порядкѣ.



Эта фигура соотвѣтствуетъ тѣлу, поверхность котораго состоитъ изъ 12 пятиугольниковъ и 16 шестиугольниковъ, тогда какъ слѣдующая фигура изображаетъ тѣло, ограниченное 12 пятиугольниками и 8 шестиугольниками, при чемъ, однако, изъ каждой вершины также исходятъ 3 ребра. Такимъ образомъ, получается 36 точекъ, связанныхъ между

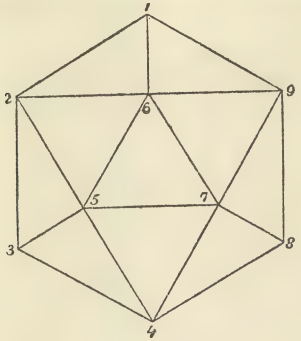
собой 36 отрѣзками, которые должны быть пройдены, и 18 запрещенными отрѣзками. Попрежнему запрещенные отрѣзки, которые опредѣляются первыми, изображены пунктиромъ, а самый маршрутъ круговой поѣздки начерченъ непрерывной линіей:

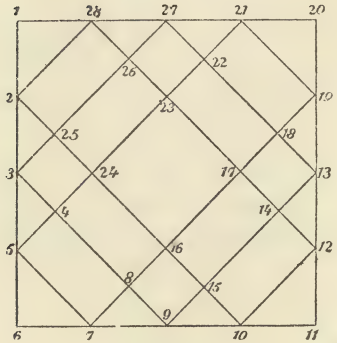


Описанный способъ можно безъ труда распространить и на такія фигуры, въ которыхъ не изъ к а ж д о й точки выходитъ по три отрѣзка. Въ этомъ случаѣ нужно каждую точку помѣтить числомъ, которое на 2 меньше числа выходовъ изъ нея, и затѣмъ позаботиться при выборѣ подлежащихъ запрещенію отрѣзковъ, чтобы изъ каждой точки исходило столько запрещенныхъ отрѣзковъ, сколько указы-

http://rcin.org.pl

ваетъ число, которымъ помѣчена эта точка. Такимъ именно способомъ получены круговыя поѣздки, которыя на двухъ нижеслѣдующихъ фигурахъ отмѣчены числами въ натуральномъ порядкѣ:





Если число точекъ и соединяющихъ ихъ отрѣзковъ очень велико, то рѣшеніе задачи о круговой поѣздкѣ черезъ всѣ точки, при чемъ каждая

http://mathesis.ru

должна быть пройдена одинъ и только одинъ разъ, становится весьма труднымъ. Еще труднѣе, однако, задача о нахожденіи всѣхъ рѣшеній, которыя можетъ имѣть эта проблема.

Разобранную нами раньше задачу объ образованіи замкнутаго хода коня въ 64 клѣткахъ шахматной доски можно также разсматривать, какъ задачу Гамильтона о круговой поѣздкѣ въ обобщенномъ видѣ. Дѣйствительно, если представимъ себѣ, что 64 клѣтки шахматной доски замѣнены 64 точками и всякія 2 точки, соотвѣтствующія клѣткамъ, между которыми возможенъ ходъ коня, соединены между собой, то мы получимъ всего 168 соединительныхъ отрѣзковъ, при чемъ изъ каждой точки выходитъ отъ 2 до 8 такихъ отрѣзковъ. Кому удалось посѣтить въ круговой поѣздкѣ 64 точки и при томъ каждую лишь по одному разу, тотъ составилъ вмѣстѣ съ тѣмъ и замкнутый ходъ коня. Если же кому-нибудь удастся опредѣлить число всѣхъ возможныхъ „круговыхъ поѣздокъ конемъ“, то онъ рѣшитъ этимъ самымъ вопросъ о нахожденіи числа всѣхъ возможныхъ задачъ на ходъ коня,—вопросъ, поставленный уже много десятплѣтій тому назадъ, но еще не вполнѣ разрѣшенный.

http://mathesis.ru

Примѣчанія и добавленія.

http://mathesis.ru

http://mathesis.ru

Примѣчанія и добавленія.

[1]) Число 142857 есть наименьшее изъ чиселъ, оканчивающихся цифрою 7 и обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что для умноженія ихъ на 3 достаточно поставить первую цифру на послѣднее мѣсто, а для умноженія на 5 достаточно поставить послѣднюю цифру на первое мѣсто.

---

[2]) Наименьшее цѣлое число, которое оканчивается цифрой 2 и удваивается при перенесеніи этой цифры на первое мѣсто, есть число 105 263 157 894 736 842.

---

[3]) Первообразнымъ корнемъ простого числа p называется каждое цѣлое число a, не дѣлящееся на p и обладающее тѣмъ свойствомъ, что число $a^x - 1$ не есть кратное числа p при $x < p - 1$, гдѣ x есть цѣлое положительное число.

---

[4]) g есть число цифръ періода дроби $1 : p$.

---

[5]) Въ нѣмецкомъ текстѣ пфенигъ вмѣсто копейки и марка вмѣсто рубля.

---

http://mathesis.ru

[6]) Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $z-(a-b)=b$ и число b картъ во всѣхъ кучкахъ не превосходитъ $n-1$, то $z-(a-b)$ n. Но, если нижняя карта каждой кучки будетъ принята за 1, то мы будемъ имѣть $a=b$ и $z<n$. А такъ какъ мы желаемъ, чтобы во всѣхъ случаяхъ оказалось достаточное число картъ, то необходимо взять $z>n$.

---

[7]) Къ задачѣ о переливаніяхъ.

Прежде всего введемъ нѣкоторые принятые въ теоріи чиселъ термины и докажемъ одну теорему. Когда при дѣленіи цѣлаго положительнаго числа c на цѣлое положительное число b получаютъ частное q и неотрицательный остатокъ r, то говорятъ, что остатокъ r есть наименьшій положительный вычетъ числа c по модулю b. Такимъ образомъ, дѣлителя называютъ модулемъ, а остатокъ — наименьшимъ положительнымъ вычетомъ по этому модулю. Наименьшими положительными вычетами по модулю b могутъ быть только слѣдующія числа

$$0,\ 1,\ldots,\ b-1,$$

ибо остатокъ (вычетъ) всегда меньше дѣлителя (модуля).

Теорема. Если число c и модуль b суть взаимно простыя числа, а наименьшіе вычеты чиселъ

$$0.c,\ 1.c,\ 2.c,\ldots,\ gc,\ldots,\ bc,\ldots,(b-1)c$$

по модулю b мы обозначимъ соотвѣтственно черезъ

$$r_0=0,\ r_1,\ r_2,\ldots,\ r_g,\ldots,\ r_h,\ldots,\ r_{b-1} \qquad (1)$$

то послѣдній рядъ чиселъ можетъ отличаться отъ ряда чиселъ

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,\ g\ldots,\ h,\ldots,\ b-1 \qquad (2)$$

только порядкомъ.

http://mathesis.ru

Доказательство. Обозначимъ соотвѣтственно черезъ q_g, q_h и q_{h-1} частныя отъ дѣленія на h чиселъ gc, hc, и $(h-1)c$; тогда

$$gc = q_g h + r_g,\ hc = q_h h + r_h;$$

поэтому

$$(h-g)c = (q_h - q_g)h + r_h - r_g.$$

Прежде всего покажемъ, что въ ряду вычетовъ нѣтъ равныхъ. Если допустить, что $r_h = r_g$, то мы имѣли бы:

$$(h-g)c = (q_h - q_g)h,$$

но это невозможно, такъ какъ $h-g<h$, а числа c и h — взаимно-простыя, между тѣмъ какъ произведеніе $(h-g)c$ дѣлится безъ остатка на h. Но если въ ряду (1) нѣтъ равныхъ чиселъ, то рядъ (1) содержитъ h различныхъ цѣлыхъ неотрицательныхъ чиселъ, изъ коихъ каждое меньше, чѣмъ h. Существуетъ только одна система такихъ чиселъ, а именно система чиселъ (2); слѣдовательно, рядъ чиселъ (1) либо ничѣмъ не отличается отъ ряда чиселъ (2), либо отличается только порядкомъ.

Обращаясь теперь къ первому методу переливанія, покажемъ, что, если по этому методу возможно сдѣлать $h-1$ переливаній, то, при h и c взаимно простыхъ, числа, выражающія послѣдовательно количества литровъ, получаемыхъ въ сосудѣ B, суть наименьшіе положительные вычеты

$$r_0, r_1, r_2, \ldots, r_g \ldots, r_h, \ldots, r_{h-1}$$

чиселъ

$$0 \cdot c,\ 1c,\ 2c, \ldots,\ gc, \ldots,\ hc, \ldots,\ (h-1)c,$$

по модулю h. Для этого докажемъ, что число литровъ жидкости, содержащихся въ сосудѣ B послѣ g-го переливанія изъ сосуда C, есть r_g. Мы не считаемъ при этомъ тѣхъ переливаній, которыя даютъ h литровъ въ сосудѣ B. Это докажется индуктивно относительно числа переливаній. Послѣ перваго переливанія въ сосудѣ B содержится c литровъ и, такъ какъ,

по предположенію, $c < b$, то при дѣленіи c на b получаемъ въ частномъ нуль и въ остаткѣ c, т. е. c и есть наименьшій вычетъ числа $1.c$ по модулю b. Допустимъ, что наше утвержденіе вѣрно для g-го переливанія изъ C въ сосудъ B, когда $1 \leqslant g < b-1$, такъ что послѣ этого переливанія сосудъ B дѣйствительно содержитъ r_g литровъ. Докажемъ, что послѣ $(g+1)$ переливанія онъ будетъ содержать r_{g+1} литровъ. Послѣ g-аго переливанія изъ сосуда C въ B мы наливаемъ c литровъ въ сосудъ C. По допущенію это возможно сдѣлать (условія этой возможности разсмотрѣны ниже). Теперь возможны два случая.

1-й случай: эти c литровъ можно перелить въ B. Это будетъ тогда, когда

$$r_g + c < b.$$

Такъ какъ $gc = q_g b + r_g$, то теперь

$$(g+1)c = q_g b + r_g + c,$$

откуда слѣдуетъ, что равенство $r_g + c = b$ недопустимо, ибо въ противномъ случаѣ число $(g+1)c$ было бы кратнымъ числа b, между тѣмъ какъ $g < b-1$, а c число взаимно простое съ b. Такъ какъ $r_g + c < b$, то $r_g + c$ есть наименьшій вычетъ числа $(g+1)c$ по модулю b, т. е. $r_{g+1} = r_g + c$. Вмѣстѣ съ этимъ послѣ $(g+1)$-го переливанія сосудъ B содержитъ $r_g + c$ литровъ.

2-й случай. Нельзя перелить c литровъ изъ сосуда C въ сосудъ B. Въ сосудъ B во всякомъ случаѣ можно еще налить $b - r_g$ литровъ, послѣ чего онъ будетъ полонъ. Теперь, очевидно,

$$b - r_g < c.$$

Послѣ того, какъ изъ сосуда C отлили $b - r_g$ литровъ въ немъ остаются $c + r_g - b$ литровъ, при чемъ

$$c + r_g > b.$$

http://mathesis.ru

Мы опорожнимъ сосудъ B и перельемъ въ него эти $c + r_g - b$ литровъ. Такимъ образомъ, послѣ $(g+1)$-го наполненія сосуда b въ немъ будетъ содержаться литровъ $c + r_g - b = c + gc - q_g b + b = (g+1)c - (q_g - 1)b$; слѣдовательно, $(g+1)c = (q_g - 1)b + (c + r_g) - b$.

Такъ какъ $c < b$ и $r_g < b$, то $c + r_g - b < 2b - b = b$; поэтому $r_{g+1} = c + r_g - b$, и вмѣстѣ съ тѣмъ сосудъ B содержитъ теперь, послѣ $(g+1)$-го переливанія, $c + r_g - b = r_{g+1}$ литровъ.

Въ виду предыдущей теоремы, мы приходимъ къ такому выводу:

Если c и b суть числа взаимно-простыя и если можно произвести $b - 1$ переливаній по первому методу, то при этихъ переливаніяхъ мы получимъ въ сосудѣ B любое цѣлое число литровъ отъ 1 до $b - 1$ включительно.

Такимъ образомъ мы можемъ получать въ сосудѣ B всякое число литровъ отъ 1 до b включительно. Разсмотримъ теперь, при какихъ условіяхъ возможно сдѣлать $b - 1$ переливаній. Послѣ g-го переливанія сосудъ B содержитъ $r_g \leqslant b - 1$ литровъ (мы опять не считаемъ тѣхъ переливаній, которыя даютъ b литровъ въ B). Послѣ этого нужно въ C налить c литровъ. Это будетъ возможно тогда и только тогда, когда $a \geqslant r_g + c$. Это неравенство будетъ выполнено при всѣхъ значеніяхъ r_g, если оно выполнено при $r_g = b - 1$; слѣдовательно, нужно, чтобы было

$$a \geqslant b + c - 1.$$

Въ сосудѣ B при этомъ, между прочимъ, получается такое количество литровъ, которое выражается любымъ числомъ, не превосходящимъ c. Передъ тѣмъ, какъ такое число литровъ получилось въ B, оно было въ C; слѣдовательно, въ C мы встрѣтимъ любое число литровъ, не превосходящее c.

Больше, чѣмъ b литровъ, мы можемъ получить только въ сосудѣ A. Наименьшее число литровъ, какое можно

имѣть въ A, есть $a-(b+c)$. Если это наименьшее число больше, чѣмъ $b+1$, то мы не можемъ получить $b+1$ литровъ ни въ одномъ сосудѣ; поэтому для возможности полученія всякаго (цѣлаго) числа литровъ, не превосходящаго a, необходимо, чтобы выполнялось соотношеніе

$$a-(b+c)\leqslant b+1,$$

или

$$a\leqslant 2b+c+1.$$

Если $0<d<c$ и d есть цѣлое число, то передъ полученіемъ d литровъ въ B мы будемъ имѣть b литровъ въ B и d литровъ въ C. Въ обоихъ сосудахъ мы будемъ имѣть $b+d$ литровъ. Такимъ образомъ выходитъ, что въ B мы можемъ получать слѣдующія числа: $1, 2, 3, \ldots, b$. Когда въ B содержится b литровъ, то въ C можно получить $1, 2, \ldots, c$ литровъ. Въ двухъ сосудахъ B и C можно получить любое число литровъ отъ 0 до $b+c$ включительно. Отсюда слѣдуетъ, что въ A можно получить любое число литровъ отъ $a-(b+c)\leqslant b+1$ до $a-0=a$, т. е. мы встрѣтимъ въ A всякое число литровъ отъ $b+1$ до a.

Итакъ, если b и c суть числа взаимно-простыя и если

$$b+c-1\leqslant a\leqslant 2b+c+1,$$

то можно по первому методу получить любое число литровъ отъ 1 до a. Мы ограничимся этими разъясненіями.

---

[8]) Обозначивъ искомыя числа черезъ x и y и переведя сказанное на языкъ алгебры, мы послѣдовательно получимъ: 1) $(7-x)+y$; 2) $(7-x)+(7-y)=14-x-y$; Далѣе: $(7-x+y)+(14-x-y)=21-2x$; 21 $-(21-2x)=2x$; $2x:2=x$. Далѣе,

$$7-x+y+7=14-x+y;\quad 14-x+y-(14-x-y)=2y;$$
$$2y:2=y.$$

---

http://mathesis.ru

[9]) Цѣпи домино.

Мы будемъ предполагать, что среди камней совсѣмъ нѣтъ дублетовъ и что мы составили какую-либо цѣпь, въ которой крайніе нумера суть a ($\leqslant n$) и b ($\leqslant n$). Нетрудно видѣть, что цѣпь можно удлинить въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ:

I. Если среди камней, не вошедшихъ въ цѣпь, есть камень съ числомъ a или съ числомъ b, ибо такой камень можно надлежащей стороной приложить къ соотвѣтственному концу цѣпи.

II. Если на камняхъ, не вошедшихъ въ цѣпь, нѣтъ ни числа a ни числа b, но есть хоть два камня съ однимъ и тѣмъ же числомъ p ($\nmid a, b$). Пусть (ps) и (pt) будутъ эти два камня ($s \nmid a, b$, $t \nmid a, b$). Этотъ случай приводится къ слѣдующимъ двумъ случаямъ:

α) камень (st) находится въ цѣпи, и въ цѣпи имѣется, слѣдовательно, часть

$$(gs)\,(st)\,(lh).$$

Удаливъ камень (st) и введя въ цѣпь два камня (sp) и (pt), мы вмѣсто прежней части получимъ часть

$$(gs)\,(sp)\,(pt)\,(lh),$$

и цѣпь будетъ удлинена на одинъ камень.

β) камень (st) находится внѣ цѣпи. Камень (ap) непремѣнно находится въ цѣпи и потому въ ней есть часть

$$(ap)\ (ph).$$

Мы можемъ ввести еще три камня въ цѣпь, замѣнивъ эту часть послѣдовательностью

$$(ap)\,(ps)\,(st)\,(tp)\,(ph)$$

и удлинивъ такимъ образомъ цѣпь на 3 камня.

Станемъ теперь удлинять нашу цѣпь указанными здѣсь

http://mathdis.ru

способами до тѣхъ поръ, пока уже не будетъ мѣста ни для случая I, ни для случая II Пусть L будетъ построенная такимъ образомъ цѣпь. Крайнія ея числа мы опять обозначимъ черезъ a и b. Разсмотримъ два случая:

1. Число n четное. Въ этомъ случаѣ наша цѣпь L будетъ замкнутой и будетъ содержать всѣ камни игры. Въ самомъ дѣлѣ, теперь каждое число содержится въ игрѣ четное число разъ. Если $a \neq b$, то a содержится въ L нечетное число разъ и, слѣдовательно, внѣ L, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ, что невозможно, ибо случай I исключенъ. Отсюда прежде всего слѣдуетъ, что $a = b$, т. е. наша цѣпь L замкнута; далѣе, изъ факта замкнутости цѣпи вытекаетъ, что каждое число p содержится въ цѣпи L четное число разъ и не можетъ встрѣчаться внѣ цѣпи, ибо оно должно было бы встрѣчаться внѣ цѣпи также четное число разъ, что невозможно, такъ какъ случай II исключенъ.

2. Число n нечетное. Въ этомъ случаѣ цѣпь L незамкнута и внѣ цѣпи остаются $\frac{1}{2}(n-1)$ камней. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ каждое число содержится въ игрѣ нечетное число разъ и потому, если бы было $a=b$, то число a, содержась въ L четное число разъ, должно было бы содержаться внѣ L хоть одинъ разъ, что невозможно. Внѣ L нѣтъ чиселъ a и b. Каждое-же изъ остальныхъ $n-1$ чиселъ входитъ въ L четное число разъ и потому встрѣчается внѣ L нечетное число разъ и именно одинъ только разъ, ибо случай II исключенъ. Такимъ образомъ, внѣ L остаются $n-1$ чиселъ, которыя помѣщены на $\frac{1}{2}(n-1)$ камняхъ.

При n нечетномъ нельзя составить болѣе длинной цѣпи, чѣмъ наша цѣпь L, ибо какова бы ни была цѣпь l, каждое число p, отличное отъ чиселъ, стоящихъ на концахъ цѣпи, будетъ встрѣчаться внутри цѣпи l четное число разъ и, слѣдовательно, внѣ цѣпи l, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ, а потому при нечетномъ n внѣ всякой цѣпи будутъ оста-

http://rcin.org.pl

ваться, по крайней мѣрѣ, $n-1$ чиселъ и, слѣдовательно, по меньшей мѣрѣ, $\frac{1}{2}(n-1)$ камней.

---

[10]) Вообще, на k-ой карточкѣ пишутся въ порядкѣ возрастанія всѣ тѣ и только тѣ числа, которыя получаются изъ выраженія

$$2^k p + q$$

при $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$; $q = 2^{k-1}, 2^{k-1}+1, 2^{k-1}+2, \ldots, 2^k - 1$.

---

[11]) О гиряхъ.

Условимся называть для краткости грузомъ p грузъ, котораго вѣсъ равенъ p, и гирей p — гирю вѣса p. Подъ взвѣшиваніемъ груза p мы будемъ разумѣть только слѣдующій процессъ: либо на одну чашку вѣсовъ кладутъ грузъ p, а на другую чашку уравновѣшивающія его гири $b_1, b_2, \ldots, b_h$ и узнаютъ такимъ образомъ, что

$$p = b_1 + b_2 + \cdots + b_h,$$

либо на одну чашку вѣсовъ кладется грузъ p и нѣкоторыя гири $c_1, c_2, \ldots, c_g$, а на другую чашку вѣсовъ кладутся гири $b_1, b_2, \ldots, b_h$, уравновѣшивающія то, что положено на первую чашку, и тогда узнаютъ, что

$$p = (b_1 + b_2 + \cdots + b_h) - (c_1 + c_2 + \cdots + c_g). \qquad (1)$$

Выраженію $c_1 + c_2 + \cdots + c_g$ мы условимся приписать опредѣленное численное значеніе также и при $g = 0$, а именно мы будемъ считать это выраженіе равнымъ нулю при $g = 0$. Тогда равенство (1) будетъ содержать въ себѣ предшествующее ему равенство, какъ частный случай.

Положимъ теперь, что у насъ имѣются n гирь

$$a_1, a_2, \ldots, a_n. \qquad (2)$$

http://mathesis.ru

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что при помощи всѣхъ или нѣкоторыхъ изъ этихъ гирь грузъ p можно будетъ взвѣсить въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда число p можетъ быть представлено въ формѣ (1), гдѣ $b_1, b_2, \ldots, b_h, c_1, c_2, \ldots, c_g$ суть $h+g$ чиселъ изъ ряда (2). Если изъ чиселъ (2) составить всевозможныя выраженія типа (1) (при чемъ уменьшаемое $b_1+b_2+\cdots+b_h$ постоянно должно быть больше вычитаемаго $c_1+c_2+\cdots+c_g$), то мы получимъ численныя величины всѣхъ тѣхъ грузовъ, какія могутъ быть взвѣшены n гирями (2). Отсюда слѣдуетъ, что наибольшее число (назовемъ его u_n) различныхъ по вѣсу грузовъ, какія могутъ быть взвѣшены при помощи n гирь, соотвѣтствуетъ тому случаю, когда среди выраженій (1), составленныхъ изъ чиселъ (2) и имѣющихъ положительныя значенія, нѣтъ равныхъ. Мы будемъ говорить, что гири (2) составляютъ особенную систему гирь въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда число различныхъ по вѣсу грузовъ, какіе могутъ быть взвѣшены при помощи этой системы гирь равно u_n, т. е. когда число этихъ грузовъ есть maximum.

Слѣдствіе первое. Особенная система гирь не содержитъ гирь, равныхъ по вѣсу.

Слѣдствіе второе. Часть особенной системы гирь есть особенная система гирь.

Наряду съ особенною системою гирь (2) будемъ также разсматривать систему гирь

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \tag{3}$$

которая, какъ часть системы (2), представляетъ также особенную систему изъ $n-1$ гирь. Если q означаетъ произвольный грузъ, который можетъ быть взвѣшенъ при помощи гирь (3), то число значеній q равно u_{n-1}. Присоединяя къ системѣ (3) гирю a_n (т. е. возвращаясь къ системѣ гирь (2)), мы сверхъ u_{n-1} грузовъ сможемъ взвѣсить еще только слѣдующіе грузы:

http://rutracker.ru

1 грузъ a_n,
u_{n-1} грузовъ $a_n + q$,
u_{n-1} грузовъ $|a_n - q|$,

гдѣ знакъ $|\ |$ означаетъ абсолютную величину. Всѣ эти грузы, числомъ $2u_{n-1}+1$, отличны другъ отъ друга и отъ каждаго изъ u_{n-1} грузовъ q, ибо система (2) предполагается особенной. Числа u_n и u_{n-1} удовлетворяютъ поэтому соотношенію

$$u_n = 3u_{n-1} + 1.$$

Замѣняя здѣсь n на $n-1$, $n-2, \ldots$, 3, 2 и замѣчая, что одною гирею можно взѣсить одинъ и только одинъ грузъ, мы будемъ имѣть рядъ равенствъ:

$$\begin{aligned} u_n &= 3u_{n-1} + 1, \\ u_{n-1} &= 3u_{n-2} + 1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_3 &= 3u_2 + 1, \\ u_2 &= 3u_1 + 1, \\ u_1 &= 1. \end{aligned}$$

Помножая эти равенства, начиная съ перваго, соотвѣтственно на 3^0, 3^1, $3^2, \ldots, 3^{n-1}$ и складывая полученныя такимъ образомъ равенства, мы найдемъ, что

$$u_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \tfrac{1}{2}(3^n - 1).$$

Такимъ образомъ, система n гирь будетъ особенной тогда и только тогда, когда при помощи гирь этой системы можно взвѣсить $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ различныхъ по вѣсу грузовъ.

Каждая отдѣльная гиря есть особенная система, состоящая изъ одной гири. Легко показать, что, если система, состоящая изъ k гирь $a_1, a_2, \ldots, a_k$, будетъ особенная и

$$s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,$$

то при $a_{k+1} > 2s_k$ система гирь

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$$

также будетъ особенная.

http://mathdoc.ru

Дѣйствительно, намъ нужно только показать, что если q есть грузъ, который можетъ быть взвѣшенъ при помощи гирь изъ ряда $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то всѣ числа a_{k+1}, $a_{k+1}+q$ и $|a_{k+1}-q|$ отличны другъ отъ друга, а также отъ каждаго изъ чиселъ q. По допущенію,

$$a_{k+1} > 2s_k = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \geqq 2q > q.$$

Отсюда, между прочимъ, слѣдуетъ, что $|a_{k+1}-q| = a_{k+1}-q$. Очевидно также, что при любыхъ значеніяхъ q_1 и q_2 числа q имѣютъ мѣсто неравенства

$$a_{k+1} - q_1 < a_{k+1} < a_{k+1} + q_2;$$

Остается только показать, что $a_{k+1} - q_1 \neq q_2$ и $a_{k+1} + q_1 \neq q_2$. Но $s_k \geqq q_1$, $s_k \geqq q_2$, и поэтому $a_{k+1} > 2s_k \geqq q_1 + q_2$; слѣдовательно,

$$a_{k+1} - q_1 > q_2 \text{ и a fortiori } a_{k+1} + q_1 > q_2,$$

что и требовалось доказать.

Беря $a_1 = 1$, $a_{k+1} = 2s_k + 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, мы получимъ замѣчательную особенную систему гирь:

$$1;\ 2.1+1=3;\ 2.(1+3)+1=9;\ 2(1+3+9)+1=27;\ldots \quad (4)$$

Члены этого ряда суть члены прогрессіи

$$1, 3, 3^2, 3^3, \ldots$$

Это очевидно для первыхъ 4 членовъ. Но если мы допустимъ, что это вѣрно для k первыхъ членовъ ряда (4), то наше утвержденіе будетъ вѣрно и для $(k+1)$-го члена этого ряда, ибо, согласно допущенію, мы будемъ имѣть

$$a_{k+1} = 2(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{k+1}) + 1 = 2\frac{3^k - 1}{2} + 1 = 3^k.$$

Такимъ образомъ, имѣя n гирь

$$1, 3, 3^2, \ldots, 3^{n-1}, \quad (5)$$

дѣйствительно можно будетъ взвѣсить $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ различныхъ

http://mathesis.ru

по вѣсу грузовъ, которые, очевидно, выражаются въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ; наибольшій изъ нихъ выражается числомъ $1+3+\cdots+3^{n-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)$. Отсюда слѣдуетъ, что при помощи n гирь системы (5) можно будетъ взвѣсить всѣ грузы, вѣса которыхъ выражаются натуральными числами

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}(3^n-1).$$

Особенную систему n гирь мы будемъ называть натуральною, если съ помощью гирь этой системы можно взвѣсить грузъ, выражаемый любымъ натуральнымъ числомъ, конечно, не превосходящимъ числа $\frac{1}{2}(3^n-1)$. Послѣдующими разсужденіями мы имѣемъ въ виду доказать, что система гирь (5) есть единственная натуральная система гирь.

Положимъ, что система n гирь (2) есть натуральная система и что p есть цѣлое число, удовлетворяющее неравенствамъ $0<p\leq\frac{1}{2}(3^n-1)$. Грузъ p можно будетъ взвѣсить при помощи гирь (2) и, слѣдовательно,

$$p=(b_1+b_2+\cdots+b_h)-(c_1+c_2+\cdots+c_g),$$

гдѣ $b_1, b_2, \ldots, b_h, c_1, c_2, \ldots, c_g$ имѣютъ указанныя на стр. 342 значенія. Означая черезъ $b_{h+1}, b_{h+2}, \ldots, b_n$ числа, находящіяся въ ряду (2), но отличныя отъ чиселъ $b_1, b_2, \ldots, b_h$, и принимая во вниманіе, что $b_1+b_2+\cdots+b_h+b_{h+1}+\cdots+b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$, мы будемъ имѣть:

$$p=\tfrac{1}{2}(3^n-1)-(c_1+c_2+\cdots+c_g+b_{h+1}+b_{h+2}+\cdots+b_n).$$

Обозначая черезъ P любое цѣлое число, удовлетворяющее соотношеніямъ $0\leq P<\frac{1}{2}(3^n-1)$, мы можемъ положить $p=\frac{1}{2}(3^n-1)-P$, и предыдущее равенство преобразуется въ равенство

$$P=c_1+c_2+\cdots+c_g+b_{h+1}+b_{h+2}+\cdots+b_n. \qquad (6)$$

Полагая здѣсь $P=1$, мы найдемъ, что при этомъ значеніи P одно изъ слагаемыхъ второй части есть 1, а остальные равны нулю. А такъ какъ всѣ числа c и b находятся среди чиселъ a, то отсюда вытекаетъ предложеніе:

http://rcin.org.pl

Каждая натуральная система гирь содержитъ гирю 1. Это есть гиря наименьшаго вѣса въ каждой натуральной системѣ. Докажемъ теперь слѣдующую лемму.

Если

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 3^2, \ldots,\ a_k = 3^{k-1},\ a_{k+1},\ a_{k+2}, \ldots,\ a_n \quad (7)$$

есть натуральная система изъ n гирь, гдѣ $n > k \geqq 1$, то

$$a_{k+1} = 3^k.$$

Доказательство. Положивъ

$$a_{k+1} < a_{k+2} < \cdots < a_n,$$

мы не ограничиваемъ общности сужденій, ибо среди гирь $a_{k+1}, \ldots, a_n$ нѣтъ равныхъ по вѣсу (стр. 342). Замѣчая же, что всѣ грузы, вѣса которыхъ q выражаются числами $1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(3^k - 1)$, могутъ быть взвѣшены при помощи гирь

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3, \ldots,\ a_k = 3^{k-1}, \quad (8)$$

образующихъ натуральную систему изъ k гирь, мы заключаемъ, что не только $a_{k+1} > \frac{1}{2}(3^k - 1)$, но и $a_{k+1} - \frac{1}{2}(3^k - 1) > \frac{1}{2}(3^k - 1)$, ибо величина выраженія $a_{k+1} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = a_{k+1} - \frac{1}{2}(3^k - 1)$, содержащаго a_{k+1}, есть вѣсъ груза p, отличнаго отъ каждаго изъ грузовъ $1, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}(3^k - 1)$ и потому превосходящаго грузъ $\frac{1}{2}(3^k - 1)$. Отсюда вытекаетъ, что $a_{k+1} > 3^k - 1$ и, слѣдовательно,

$$a_{k+1} \text{ не } < 3^k. \quad (9)$$

Полагая же въ равенствѣ (6), $P = 3^k$, мы увидимъ, что въ правой части равенства

$$3^k = c_1 + c_2 + \cdots + c_g + b_{h+1} + b_{h+2} + \cdots + b_n \quad (10)$$

не можетъ быть ни одного слагаемаго, которое больше, чѣмъ 3^k. Если бы тамъ не было и слагаемаго 3^k, то каждое изъ чиселъ $c_1, c_2, \ldots, c_g, b_{h+1}, b_{h+2}, \ldots, b_n$ было бы однимъ изъ чиселъ (8), а такъ какъ въ равенствѣ (10) числа c суть различ-

http://vmathesis.ru

ныя числа изъ ряда 1, 3, ..., 3^{k-1} и то же относится къ числамъ b, то имѣли бы мѣсто соотношенія $c_1+c_2+\cdots+c_g \leqq 1+3+\cdots+3^{k-1}=\frac{1}{2}(3^k-1)$, $b_{h+1}+b_{h+2}+\cdots+b_n \leqq \frac{1}{2}(3^k-1)$. Складывая эти неравенства и принимая во вниманіе равенство (10), придемъ къ нелѣпому соотношенію

$$3^k \leqq 3^k - 1.$$

Отсюда слѣдуетъ, что правая часть равенства (10) содержитъ слагаемое 3^k, а это значитъ, что система гирь (7) содержитъ гирю 3^k. Если бы этой гирей была одна изъ гирь $a_{k+2}, \ldots, a_n$, то имѣло бы мѣсто неравенство $a_{k+1} < 3^k$, что невозможно въ силу соотношенія (9). Такимъ образомъ $a_{k+1} = 3^k$.

Мы видѣли, что гиря 1 входитъ въ составъ каждой натуральной системы гирь. Если теперь

$$1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

есть натуральная система гирь, то, примѣняя $n-1$ разъ нашу лемму, найдемъ послѣдовательно, что $a_2=3$, $a_3=3^2$ ..., $a_n = 3^{n-1}$, и, слѣдовательно система гирь

$$1, 3, 3^2, \ldots, 3^{n-1}$$

есть единственная натуральная система изъ n гирь.

Допустимъ, что имѣется система гирь

$$1, 3, 3^2, \ldots, 3^{n-1} \qquad (5)$$

и грузъ, коего вѣсъ p есть цѣлое число, не превосходящее числа $\frac{1}{2}(3^n-1)$. Спрашивается, какъ расположить гири системы (5) на чашкахъ вѣсовъ, чтобы взвѣсить грузъ p. Совершимъ для этой цѣли надъ числомъ p тотъ рядъ операцій, который въ ариѳметикѣ предписывается для изображенія числа p по троичной системѣ счисленія и притомъ при помощи цифръ 0, —1 и 1. Мы дѣлимъ число p на 3. Остатокъ ε_1 этого дѣленія будетъ либо 0, либо 1, либо 2; въ послѣд-

немъ случаѣ увеличимъ частное на 1; тогда остатокъ будетъ -1. Итакъ, предполагая, что остатокъ ε_1 есть одно изъ чиселъ -1, 0, 1, обозначимъ частное черезъ q_1. Это частное вновь дѣлимъ на 3, при чемъ получимъ остатокъ ε_2, равный одному изъ чиселъ -1, 0, 1, и частное q_2. Частное q_2 опять дѣлимъ на 3 и т. д. до тѣхъ поръ, пока получимъ частное $q_m = 1$. Тогда имѣемъ рядъ равенствъ:

$$\begin{aligned} p &= 3q_1 + \varepsilon_1, \\ q_1 &= 3q_2 + \varepsilon_2, \\ q_2 &= 3q_3 + \varepsilon_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q_{m-1} &= 3q_m + \varepsilon_m, \\ q_m &= 1. \end{aligned}$$

Помножая эти равенства соотвѣтственно на $3^0, 3^1, 3^2, \ldots, 3^m$ и складывая полученныя такимъ образомъ равенства, найдемъ, что

$$p = 3^m + \varepsilon_m \cdot 3^{m-1} + \varepsilon_{m-1} \cdot 3^{m-2} + \cdots + \varepsilon_3 3^2 + \varepsilon_2 3 + \varepsilon_1. \quad (11)$$

Такъ какъ каждое изъ чиселъ ε есть либо -1, либо 0, либо 1, то

$$\varepsilon_m 3^{m-1} + \varepsilon_{m-1} 3^{m-2} + \cdots + \varepsilon_2 3 + \varepsilon_1 \geqq -3^{m-1} - 3^{m-2} - \cdots - 3 - 1 = -\tfrac{1}{2}(3^m - 1);$$

поэтому

$$\tfrac{1}{2}(3^n - 1) \geqq p \geqq 3^m - \tfrac{1}{2}(3^m - 1) = \tfrac{1}{2}(3^m + 1);$$

слѣдовательно

$$3^n - 1 \geqq 3^m + 1, \text{ или } 3^m(3^{n-m} - 1) \geqq 2,$$

откуда вытекаетъ, что $n - m \geqq 1$ и

$$m \leqq n - 1.$$

Пусть теперь $3^m + 3^{m_1} + 3^{m_2} + \cdots$ будетъ сумма тѣхъ членовъ правой части равенства (11), для которыхъ коэффиціенты ε равны единицѣ. Пусть, далѣе, $3^l + 3^{l_1} + \cdots$ будетъ

lib.mathesis.ru

сумма абсолютныхъ величинъ тѣхъ членовъ правой части равенства (11), которые входятъ въ него со знакомъ минусъ. Тогда

$$p = (3^m + 3^{m_1} + 3^{m_2} + \cdots) - (3^l + 3^{l_1} + \cdots).$$

Всѣ числа k и l различны, ни одно изъ нихъ не больше $n-1$ и каждое есть цѣлое число, не меньшее нуля; слѣдовательно, для того, чтобы взвѣсить грузъ p при помощи гирь $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{n-1}$, необходимо и достаточно положить гири $3^m, 3^{m_1}, \ldots$ на одну чашку вѣсовъ, а гири $3^l, 3^{l_1} + \cdots$ на другую чашку вѣсовъ.

Примѣръ. При помощи гирь системы $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$, коихъ сумма вѣсовъ равна $\frac{1}{2}(3^6 - 1) = 364$, требуется отвѣсить 168 единиицъ вѣса. Частное отъ дѣленія 168 на 3 равно 56 и остатокъ $\varepsilon_1 = 0$; частное отъ дѣленія 56 на 3 есть 19, а остатокъ $\varepsilon_2 = -1$. Затѣмъ находимъ частное 6, остатокъ $\varepsilon_3 = 1$, потомъ частное 2 и остатокъ $\varepsilon_4 = 0$. Дѣля 2 на 3, получимъ остатокъ $\varepsilon_5 = -1$ и частное 1; поэтому

$$\begin{aligned} 168 &= 3^5 - 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 - 1 \cdot 3 + 0 \\ &= (3^5 + 3^2) - (3^4 + 3). \end{aligned}$$

Чтобы отвѣсить 168 фунтовъ необходимо и достаточно положить на одну чашку вѣсовъ гири 3^5 и 3^2, а на другую чашку 3^4 и 3. Гири 1 и 3 въ этомъ случаѣ не нужны.

---

[12]) Въ теоріи формъ доказывается, что дѣлители чиселъ вида $v^2 + w^2$ тоже суть числа вида $v^2 + w^2$.

---

[13]) Остатокъ, равный нулю, замѣняется числомъ n.

---

[14]) **О непрерывномъ вычерчиваніи фигуръ.**

Задача, рѣшеніе которой будетъ изложено въ этомъ добавленіи, заключается въ требованіи вычертить анную

фигуру (систему линій) непрерывнымъ движеніемъ, не проходя дважды по одной и той же линіи, принадлежащей фигурѣ, и не вычерчивая не принадлежащихъ ей линій. Условимся называть вершинами фигуры точки, въ которыхъ линіи фигуры либо пересѣкаются, либо пресѣкаются, а также и тѣ точки, въ которыхъ вычерчиваніе начинается или оканчивается, при чемъ вершину, въ которой начинается вычерчиваніе, будемъ называть начальной, вершину, въ которой оканчивается вычерчиваніе — конечной, а всѣ прочія вершины — промежуточными. Можетъ, понятно, случиться, чтобы конечная вершина была въ то же время и начальной. Стороною фигуры мы будемъ называть такой отрѣзокъ линіи, входящей въ составъ фигуры, на которомъ расположены только двѣ вершины, при чемъ этотъ отрѣзокъ необходимо будетъ ими ограниченъ. Каждая сторона фигуры будетъ называться лучемъ по отношенію къ вершинѣ, изъ которой она исходитъ. Вершина, изъ которой исходитъ четное число лучей, будетъ называться четной, всѣ прочія вершины будутъ называться нечетными. Такъ какъ каждая сторона фигуры служитъ лучемъ каждой изъ двухъ соединяемыхъ ею вершинъ, то число всѣхъ лучей фигуры вдвое больше числа сторонъ, т. е. каждая фигура неизбѣжно заключаетъ въ себѣ четное число лучей.

Пусть F будетъ какая-либо фигура, вычерченная въ условіяхъ разсматриваемой задачи; A — начальная, B — конечная и C — какая-либо промежуточная вершина фигуры. Легко видѣть, что всякое прохожденіе черезъ промежуточную вершину C сопровождается вычерчиваніемъ двухъ ея лучей: того, по которому приходимъ въ C, и того, по которому выходимъ изъ C. Если при вычерчиваніи фигуры проходили черезъ C всего n разъ, то вершина C содержитъ $2n$ лучей. Изъ этихъ разсужденій явствуетъ, что каждая промежуточная вершина фигуры F, вычерченной въ условіяхъ разсматриваемой задачи, содержитъ четное число лучей. Что же

касается вершинъ A и B, то слѣдуетъ различать два случая: 1) когда A совпадаетъ съ B, т. е. когда начальная вершина бываетъ и конечной, то вычерчиваемъ одинъ лучъ вершины A, исходя изъ А, одинъ лучъ, возвращаясь окончательно въ A, и четное число лучей, проходя одинъ или нѣсколько разъ черезъ A (если только изъ A исходитъ больше двухъ лучей). Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ вершина A (а, слѣдовательно, и каждая вершина фигуры) есть четная вершина. 2) Когда A не совпадаетъ съ B, то вычерчиваемъ одинъ лучъ вершины A, исходя изъ A, и четное число лучей, проходя черезъ A, т. е. вершина A будетъ нечетной. Вершина B также будетъ нечетной, ибо четное число лучей вершины B вычерчивается при прохожденіяхъ черезъ B и одинъ ея лучъ вычерчивается, когда окончательно возвращаемся въ B. Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ фигура F заключаетъ двѣ нечетныя вершины A и B. Изъ сказаннаго выводимъ слѣдующее необходимое условіе возможности вычерчиванія фигуры съ соблюденіемъ требованій разсматриваемой задачи.

I. Для того, чтобы данную фигуру F возможно было вычертить съ соблюденіемъ изложенныхъ требованій, необходимо, чтобы фигура F заключала либо только четныя, либо двѣ и только двѣ нечетныя вершины. Въ первомъ случаѣ вычерчиваніе фигуры F необходимо будетъ начинаться и оканчиваться въ одной и той же вершинѣ, во второмъ случаѣ вычерчиваніе необходимо начинается въ одной изъ двухъ нечетныхъ вершинъ и оканчивается въ другой.

Легко видѣть, что, если вычерчиваніе фигуры F съ четными вершинами возможно *) тогда, когда начинаемъ и оканчи-

*) Говоря «вычерчиваніе фигуры возможно», мы будемъ подразумѣвать вычерчиваніе съ соблюденіемъ условій задачи.

ваемъ вычерчиваніе въ вершинѣ A, то оно будетъ возможно и когда, когда начнемъ его и въ любой изъ остальныхъ вершинъ, т. е. безразлично, въ какой изъ вершинъ начинается вычерчиваніе. Дѣйствительно, если вершины, черезъ которыя мы послѣдовательно проходили, отмѣтимъ буквами A, B, $C, \ldots$, $K, \ldots$, $P, \ldots$, Z, A (при чемъ, конечно, можетъ случиться, что какая-либо вершина — напримѣръ P—тождественна съ какими-либо изъ предшествующихъ вершинъ,—напримѣръ, съ K), то легко замѣтить, что, если начнемъ вычерчиваніе съ одной изъ промежуточныхъ вершинъ—напримѣръ, съ K—и пройдемъ путь $K, \ldots, P, \ldots, Z, A, B, C, \ldots, K$, то вся фигура будетъ вычерчена. Нетрудно также усмотрѣть, что, если фигура имѣетъ двѣ нечетныя вершины A и B, то безразлично, какую изъ нихъ примемъ за начальную, ибо, если фигуру возможно вычертить, начавъ въ A и окончивъ (необходимо) въ B, то ее возможно также вычертить, начавъ въ B и окончивъ въ A, при чемъ будетъ пройденъ тотъ же путь въ обратномъ направленіи.

Фигуру F мы будемъ называть односвязной, если она содержитъ хоть одну вершину A, обладающую тѣмъ свойствомъ, что, исходя изъ A и двигаясь по сторонамъ фигуры, мы можемъ придти въ любую вершину фигуры F. Очевидно, что, если хоть одна вершина A фигуры обладаетъ такимъ свойствомъ, то и всякая другая вершина M той же фигуры обладаетъ тѣмъ же свойствомъ, ибо мы можемъ, исходя изъ M, придти въ любую вершину фигуры, пройдя путь отъ M до A и отъ A до желаемой вершины. Неодносвязная фигура, подобная, напримѣръ, изображенной здѣсь, очевидно, не можетъ быть вычерчена съ соблюденіемъ требованій задачи, ибо, если, исходя изъ A и двигаясь по сторонамъ фигуры, нельзя придти, напримѣръ, въ B, то всякій разъ, когда вычертимъ одну изъ этихъ двухъ вершинъ, нельзя будетъ вычертить другой. Отсюда слѣдуетъ условіе:

II. Для того, чтобы фигуру F возможно было вычертить въ условіяхъ задачи, необходимо, чтобы фигура F была односвязной.

Прежде, чѣмъ покажемъ достаточность условій I и II для возможности вычерчиванія фигуры F, докажемъ слѣдующія двѣ леммы:

Лемма первая. Фигура съ нечетнымъ числомъ нечетныхъ вершинъ невозможна.

Дѣйствительно, если F есть фигура съ нечетнымъ числомъ нечетныхъ вершинъ, то число S всѣхъ лучей, принадлежащихъ нечетнымъ вершинамъ, есть число нечетное, ибо S есть сумма нечетнаго числа нечетныхъ чиселъ. Число s всѣхъ лучей, принадлежащихъ четнымъ вершинамъ фигуры F, есть число четное, ибо s есть сумма четныхъ чиселъ. Такимъ образомъ, число $S+s$ всѣхъ лучей фигуры есть число нечетное, что, какъ мы выше видѣли, невозможно.

Пусть AB будетъ сторона и C одна изъ вершинъ одно связной фигуры F_{n+1}. Двигаясь по ея сторонамъ, можно, по опредѣленію, придти изъ A въ C, а также изъ B въ C, но легко видѣть, что, если для перехода изъ A въ C необходимо пройти сторону AB, то изъ B въ C можно пройти, не двигаясь по этой сторонѣ. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ для общности, что при переходѣ изъ A въ C приходилось нѣсколько разъ возвращаться въ точку A и разсмотримъ путь l, пройденный послѣ того, какъ точка A была оставлена въ послѣдній разъ. Путь l ведетъ отъ A къ C и содержитъ слѣдовательно, сторону AB. Отсюда вытекаетъ, что l состоитъ изъ части AB и части, ведущей отъ B къ C и не содержащей точки A, ибо къ точкѣ A мы уже больше, по предположенію, не возвращаемся По этой послѣдней части можно, слѣдовательно, пройти изъ B въ C, не проходя прямой AB.

Положимъ теперь, что въ нашей односвязной фигурѣ

F_{n+1} опущена сторона AB, послѣ чего осталась фигура F_n, которая можетъ быть односвязной или неодносвязной. Въ случаѣ неодносвязности фигуры F_n мы будемъ говорить, что при опусканіи стороны AB фигура F_{n+1} разрывается. Положимъ, что фигура F_n неодносвязная, и пусть C будетъ такая ея вершина, въ которую нельзя придти изъ A, двигаясь по сторонамъ фигуры F_n. Ясно, что при переходѣ отъ A къ C по сторонамъ фигуры F_{n+1} необходимо было пройти сторону AB (ибо въ противномъ случаѣ можно было бы на фигурѣ F_n пройти изъ A въ C точно такъ же, какъ на фигурѣ F_{n+1}). Но мы видѣли, что въ такомъ случаѣ можно пройти изъ B въ C по сторонамъ фигуры F_{n+1}, не проходя стороны AB, и, слѣдовательно, по тому же пути можно пройти изъ B въ C на фигурѣ F_n.

Итакъ, если, опустивъ въ фигурѣ F_{n+1} сторону AB, мы разрываемъ фигуру, получивъ при этомъ неодносвязную фигуру F_n, то вершины этой послѣдней могутъ быть разбиты исчерпывающимъ образомъ на два класса: 1) вершины, къ которымъ можно придти изъ A, двигаясь по сторонамъ фигуры F_n, и 2) вершины, къ которымъ, двигаясь по сторонамъ фигуры F_n, нельзя придти изъ A, но можно придти изъ B. Вершины перваго класса и соединяющія ихъ стороны фигуры F_n образуютъ односвязную фигуру f съ вершиной A; вершины другого класса и соединяющія ихъ стороны фигуры F_n образуютъ односвязную фигуру φ съ вершиной B. Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ слѣдующему выводу:

Лемма вторая. Если въ односвязной фигурѣ F_{n+1} опустить одну сторону AB, то полученная фигура F_n либо будетъ односвязной, либо будетъ состоять изъ двухъ односвязныхъ фигуръ: фигуры f съ вершиной A и фигуры φ съ вершиной B.

Обозначивъ теперь черезъ F_{n+1} фигуру, содержащую $n+1$ сторонъ и удовлетворяющую условіямъ I и II, дока-

жемъ, что эти условія достаточны для возможности вычерчиванія фигуры F_{n+1}, если только они достаточны для возможности вычерчиванія всякой фигуры, содержащей не больше, чѣмъ n сторонъ. Такъ какъ фигура объ одной сторонѣ необходимо удовлетворяетъ условіямъ I и II и можетъ быть вычерчена непрерывнымъ движеніемъ, то этимъ докажемъ, что условія I и II вообще достаточны.

Пусть A будетъ какая-либо изъ вершинъ фигуры F_{n+1} въ томъ случаѣ, когда послѣдняя содержитъ только четныя вершины, и будемъ разумѣть подъ A одну изъ нечетныхъ вершинъ фигуры въ томъ случаѣ, когда фигура содержитъ двѣ нечетныя вершины. Исходя изъ A, вычертимъ сторону AB фигуры; тогда останется вычертить фигуру F_n объ n сторонахъ.

Разсмотримъ нѣсколько случаевъ.

Когда фигура F_{n+1} содержитъ только четныя вершины, то фигура F_n, содержа двѣ нечетныя вершины A и B, удовлетворяетъ условію I. Она удовлетворяетъ также и условію II, ибо въ противномъ случаѣ она состояла бы изъ двухъ односвязныхъ фигуръ f и φ, изъ коихъ каждая соотвѣтственно содержала бы по одной нечетной вершинѣ A и B, что невозможно по первой леммѣ. Но если фигура F_n удовлетворяетъ условіямъ I и II, она, по допущенію, можетъ быть вычерчена, при чемъ вычерчиваніе можетъ начинаться съ вершины B.

Когда фигура F_{n+1} содержитъ двѣ нечетныя вершины A и B есть вторая нечетная вершина, то фигура F_n, содержа однѣ только четныя вершины, удовлетворяютъ условію I. Если она удовлетворяетъ и условію II, то ее возможно вычертить, начиная съ B; если же она условію II не удовлетворяетъ, то она состоитъ изъ двухъ фигуръ f и φ, изъ коихъ каждая, удовлетворяя условіямъ I и II и содержа меньше, чѣмъ n сторонъ, можетъ быть въ отдѣльности вы-

черчена въ условіяхъ разсматриваемой нами задачи. Въ этомъ случаѣ нельзя вычертить фигуры F_{n+1}, исходя изъ A и переходя въ B, но эту фигуру можно вычертить такъ: исходя изъ A, вычертимъ фигуру f; конечною вершиною будетъ служить вершина A. Перейдя затѣмъ по сторонѣ AB въ B, вычертимъ фигуру φ.

Когда фигура F_{n+1} содержитъ двѣ нечетныя вершины и второю нечетною вершиною служитъ не B, а C, то фигура F_n, содержа только двѣ нечетныя вершины B и C, можетъ быть вычерчена, если только она удовлетворяетъ условію II. Въ противномъ случаѣ она состоитъ изъ двухъ односвязныхъ фигуръ f и φ, и невозможно, чтобы изъ двухъ нечетныхъ вершинъ B и C одна принадлежала f, а другая φ, ибо тогда, вопреки первой леммѣ, эти фигуры имѣли бы по одной только нечетной вершинѣ. Такъ какъ вершина B принадлежитъ фигурѣ φ, то f содержитъ только четныя, а φ—обѣ нечетныя вершины B и C. Вычерчиваніе фигуры F_{n+1} можетъ быть произведено слѣдующимъ образомъ: начавъ съ A, вычертимъ фигуру f, удовлетворяющую условіямъ I и II и содержащую не больше, чѣмъ n сторонъ. Окончивъ вычерчиваніе фигуры f въ A, перейдемъ по AB въ B и вычертимъ фигуру φ, содержащую не больше, чѣмъ n сторонъ и удовлетворяющую условіямъ I и II, при чемъ вычерчиваніе φ начнемъ съ нечетной вершины B и окончимъ въ нечетной вершинѣ C.

Такимъ образомъ, доказана достаточность условій I и II. Изъ хода доказательства явствуетъ, что, когда эти условія удовлетворены, то для вычерчиванія фигуры надо начать съ любой вершины въ фигурѣ, содержащей однѣ четныя вершины, и съ одной изъ нечетныхъ вершинъ въ фигурѣ, содержащей двѣ нечетныхъ вершины. Засимъ необходимо и всегда возможно двигаться по сторонамъ фигуры такъ, чтобы сохранять односвязность не вычерченной части.

http://mathesis.ru

[15]) Окружность круга раздѣлимъ на 20 частей и въ точкахъ дѣленія разставимъ по порядку, двигаясь въ направленіи движенія часовой стрѣлки, числа 1, 2, . . ., 20. Затѣмъ разставимъ по порядку въ тѣхъ же точкахъ дѣленія буквы

r r r l l l r l r l r r r l l l r l r l,

начиная съ точки 1 и слѣдуя порядку возрастанія нумеровъ. Мы пройдемъ вышеприведенный рядъ буквъ, если будемъ двигаться по окружности въ направленіи движенія часовой стрѣлки, начиная съ точки 1 или съ точки 11. Мы получимъ еще рядъ

r r r l r l r l l l r r r l r l r l l l,

также начинающійся тремя буквами r, если будемъ двигаться въ прямо противоположномъ направленіи, начиная съ точки 3 или съ точки 13.

---

[16]) Станція M не можетъ быть послѣдней, такъ какъ поѣздка круговая.

http://mathesis.ru

http://mathesis.ru

КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО «МАТЕЗИСЪ».

ЛАКУРЪ П. и АППЕЛЬ Я.

ИСТОРИЧЕСКАЯ ФИЗИКА.

Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей

„Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики".

Въ 2-хъ томахъ большого формата 8⁰. 892 стр.
Съ **799 рисунками** и **6** отдѣльными цвѣтными таблицами.

Цѣна 7 р. 50 к.

СОДЕРЖАНІЕ I-го тома:

Мірозданіе — *Свѣдѣнія и открытія до 1630 г.* Свѣтъ — *Отъ древнѣйшихъ временъ до Ньютона.* Сила — *Движеніе, Энергія, Жидкости, Воздушный океанъ.* Мірозданіе — *Свѣдѣнія и открытія послѣ 1630 г.* Звукъ. Природа свѣта. Спектральный анализъ. Указатель. Таблица I: Неподвижныя звѣзды сѣвернаго неба. Таблица II: Спектры.

СОДЕРЖАНІЕ II-го тома:

Теплота. Магнитизмъ. Электричество до 1790 г. Электрическій токъ. Погода. Прибавленіе: Радіоактивность. Указатель. Карты: Изотермы января — Изотермы іюля — Изобары января — Изобары іюля.

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающею вниманія при пополненіи ученическихъ библіотекъ средн. учебн. заведеній.

Изъ отзывовъ. «Такія книги, какъ «Историческая физика», представляютъ собой рѣдкое явленіе въ міровой учебной литературѣ, какъ по широтѣ замысла, такъ и по мастерству выполненія. Авторы обна-

ружили много вкуса и критическаго чутья въ выборѣ изъ необозримой груды историческихъ фактовъ наиболѣе подходящаго матеріала и много искусства въ его распланированіи». Н. Томилинъ. *Русская школа,* мартъ 1909.

«Нельзя не привѣтствовать этого интереснаго изданія...

Книга читается очень легко; она содержитъ весьма удачно подобранный матеріалъ и обильно снабжена хорошо выполненными рисунками. Переводъ никакихъ замѣчаній не вызываетъ». Проф. О. Хвольсонъ. *Журналъ М. Н. Пр.* Декабрь 1907.

... «мѣсто книги—во всякой благоустроен. учительск. и ученическ. библіотекѣ. Своеобразная прелесть историческаго изложенія, думается мнѣ, можетъ способствовать возбужденію интереса къ физикѣ въ тѣхъ учащихся, у которыхъ преобладаетъ склонность ко всему «историческому» и которымъ нерѣдко физика представляется предметомъ чуждымъ и труднымъ». Н. Дренетльнъ. *Педагогическій сборникъ.* Ноябрь 1907.

ТРОМГОЛЬТЪ СОФУСЪ.

ИГРЫ СО СПИЧКАМИ.

ЗАДАЧИ и РАЗВЛЕЧЕНІЯ.

Переводъ съ нѣмецкаго. **146** стр. 16⁰. Свыше **250** чертежей и рисунковъ.

Цѣна 50 коп.

«Игры со спичками». С. Тромгольда представляютъ собраніе задачъ и развлеченій при помощи обыкновенныхъ спичекъ. Не являясь книгой популярно научнаго характера, «Игры со спичками» даютъ, однако, въ своихъ задачахъ, составленныхъ въ высшей степени остроумно и оригинально, столько матеріала для геометрическихъ и ариѳметическихъ соображеній, что книгоиздательство «Матезисъ» нашло появленіе этой книги въ ряду своихъ изданій весьма желательнымъ; издательство увѣрено, что книга эта можетъ заинтересовать не только учащихся, на которыхъ она главнымъ образомъ разсчитана, но и взрослаго.

„Матезисъ“

Книгоиздательство научныхъ и популярно-научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ.

Одесса, Новосельская, 66.

Вышли въ свѣтъ слѣдующія изданія:

1. **Св. Арреніусъ**, проф. ФИЗИКА НЕБА. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. VIII+250 стр. 8°. Съ 68 рис. и 1 черн. и 1 цвѣтн. табл. Ц. 2 р. *) Изданіе распродано.

Научность содержанія, ясность и простота изложенія и превосходный переводъ соперничаютъ другъ съ другомъ. *Русск. Мысль.*

2 и 3. **Г. Абрагамъ**, проф. СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ, составл. при участ. мног. проф. и преподав. физики. Пер. съ фр. подъ редакц. прив.-доц. *Б. П. Вейнберга.*

Часть I: XVI+272 стр. Свыше 300 рис. *2-е изд.* Ц. 1 р. 50 к.

Систематически составленный сводъ наиболѣе удачныхъ, типичныхъ и поучительныхъ опытовъ. *Вѣстн. и Библіот. Самообразов.*

Часть II: 434+LXXV стр. Свыше 400 рис. *2-е изд.* Ц. 2 р. 75 к.

Мы надѣемся, что разбираемый трудъ станетъ настольной книгой каждой физической лабораторіи въ Россіи. *Русская Мысль.*

4. УСПѢХИ ФИЗИКИ. Сборн. статей о важн. открытіяхъ послѣдн. лѣтъ въ общедост. изложеніи, подъ ред. „Вѣст. Оп. Физ. и Элемент. Матем.“ VIII+ 148 стр. 8°. Съ 41 рис. и 2 табл. *3-е изд.* Ц. 75 к. *).

Нужно надѣяться, что послѣднее послужитъ къ широкому распространенію этой чрезвычайно интересной книги. *Русская Мысль.*

5. **Ф. Ауэрбахъ**, проф. ЦАРИЦА МІРА И ЕЯ ТѢНЬ. Общедост. изложеніе основаній ученія объ *энергіи и энтропіи*. Пер. съ нѣм. Съ предисл. *Ш. Э. Гильома*. VIII+56 стр 8°. *5-е изд.* Ц. 40 к. *).

Слѣдуетъ признать брошюру Ауэрбаха чрезвычайно интересной. *Журн. М. Н. Пр.*

6. **С. Ньюкомъ**, проф. АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ. Пер. съ англ. Съ предисл. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. XXIV+286 стр. 8°. Съ портр. автора, 64 рис. и 1 табл. *2-е изд.* Ц. 1 р. 50 к. *).

И вполнѣ научно, и совершенно доступно, и изящно написанная книга... переведена и издана очень хорошо. *Вѣстн. Воспитанія.*

---

*) *Изданія, отмѣченныя звѣздочкой, Учен. Ком. М. Н. Пр. признаны заслуживающими вниманія при пополн. учен. библ. сред. учеб. заведеній.*

7. **Г. Веберъ** и **I. Вельштейнъ**. ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. **Томъ I.** ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЫ, обработ. проф *Веберомъ*. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *В. Ф. Кагана*. Книга I. ОСНОВАНІЯ АРИѲМЕТИКИ. Книга II. АЛГЕБРА. Книга III. АНАЛИЗЪ. XIV+623 стр. 8⁰. Съ 38 чертеж. Ц. 3 р. 50 к. *) (Печатается второе изданіе).

Вы все время видите передъ собой мастера своего дѣла, который съ любовью показываетъ великія творенія человѣческой мысли, извѣстныя ему до тончайшихъ подробностей. *Педагогич. Сборн.*

---

8. **Дж. Перри**, проф. ВРАЩАЮЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ. Публ. лекція. Пер. съ англ. VII+95 стр. 8⁰. Съ 63 рис. *Изд. 2-е.* Ц. 60 к. *).

Книжка, воочію показывающая, какъ люди истиннаго знанія, не цеховой только науки, умѣютъ распоряжаться научнымъ матеріаломъ при его популяризаціи. *Русская Школа.*

---

9. **Р. Дедекиндъ**, проф. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА. Пер. прив.-доц. *С. Шатуновскаго*, съ прил. его статьи: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНІЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХЪ ЧИСЕЛЪ. *Изд. 2-е.* 40 стр. 8⁰. Ц. 40 к. *).

Небольшой по объему, но, такъ сказать, законодательный по содержанію трудъ. *Русская Школа.*

---

10. **К. Шейдъ**, проф. ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ ДЛЯ ЮНОШЕСТВА Пер. съ нѣм. подъ ред. лаб Новоросс. унив. *Е. С. Ельчанинова.* IV+192 стр. 8⁰. Съ 79 рис. Ц. 1 р. 20 к.

Превосходная книга, какой намъ давно не хватало. Всюду въ книгѣ сохраняешь благотворное чувство, что находишься въ совершенно надежныхъ рукахъ... учитъ серьезной наукѣ въ болѣе легкой формѣ. *Zeitshrift für Lehrmittelwesen und pädagogische Litteratur.*

---

11. **Э. Вихертъ**, проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ГЕОДЕЗІЮ. Лекціи для преподав. средн. учебн. заведеній. Пер. съ нѣм. 80 стр. 16. Съ 41 рис. Ц. 35 к. *). Изданіе распродано.

Излагаетъ основы низшей геодезіи, имѣя въ виду пользованіе въ школѣ въ качествѣ практическаго пособія... Изложеніе очень сжато, но полно и послѣдовательно. *Вопросы физики.*

---

12. **Б. Шмидъ**. ФИЛОСОФСКАЯ ХРЕСТОМАТІЯ. Пособіе для средн. учебн. зав. и для самообраз. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. Н. Ланге.* VIII+171 стр. 8⁰ Ц. 1 р. *).

... Для человѣка, занятаго самообразованіемъ и немного знакомаго съ философіей и наукой, она (книга) даетъ разнообразный и интересный матеріалъ. *Вопросы Философіи и Психологіи.*

http://mathesis.ru

13. **С. Тромгольтъ.** ИГРЫ СО СПИЧКАМИ. Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16°. Свыше 250 рис. и черт. Ц. 50 к.

14. **В Ветгэмъ**, проф. СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТІЕ ФИЗИКИ. Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Б. П. Вейнберга* и *А. Р. Орбинскаго*. Съ прилож. рѣчи пред. министра Англіи *A. J. Balfour'a*: НѢСКОЛЬКО МЫСЛЕЙ О НОВОЙ ТЕОРІИ ВЕЩЕСТВА. VIII+319 стр. 8°. Съ 5 портр., 6 отд. табл. и 33 рис. *Изд. 2-е* Ц. 2 р.*).

Старается представить въ стройной и глубокой системѣ всѣ явленія физическаго опыта и рисуетъ читателю дѣйствительно захватывающую картину грандіозныхъ завоеваній человѣческаго генія.

Современный міръ.

15. **Н. Г. Ушинскій**, проф. ЛЕКЦІИ ПО БАКТЕРІОЛОГІИ. VIII+136 стр. 8°. Съ 34 рис. на 15 отд. табл. Ц. 1 р. 50 к.

16. **А. Риги**, проф. СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРІЯ ФИЗИЧЕСКИХЪ ЯВЛЕНІЙ (Радіоактивность, іоны, электроны). Пер. съ 3-го итал. изд. VIII+146 стр. 8°. Съ 21 рис. *2-е изд.* Ц. 1 р. *).

Книгу Риги можно смѣло рекомендовать образованному человѣку, какъ лучшее имѣющееся у насъ изложеніе новѣйшихъ взглядовъ на обширную область физическихъ явленій. *Педаг. Сборн.*

17. **А. В. Клоссовскій**. проф. ФИЗИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ НАШЕЙ ПЛАНЕТЫ. Изд. 2-е, испр. и доп. 45 стр. 8°. Ц. 40 к. *)

Рѣдко можно встрѣтить изложеніе, въ которомъ въ такой степени соединялась бы высокая научная эрудиція съ картинностью и увлекательностью рѣчи. *Педаг. Сборн.*

18. **П. Лакуръ и Я. Аппель.** ИСТОРИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. Пер. съ нѣм. подъ ред. „Вѣстн. Оп. Физ. и Элем. Матем.“. Въ двухъ томахъ. 892 стр. 8°. Съ 796 рис. и 6 отд. табл. Ц. 7 р. 50 к. *).

„Нельзя не привѣтствовать этого интереснаго изданія . . . Книга читается легко; содержитъ весьма удачно подобранный матеріалъ и обильно снабжена хорошо выполненными рисунками. Переводъ никакихъ замѣчаній не вызываетъ“... *Ж. М. Н. Пр.*

19. **Св. Арреніусъ.** ОБРАЗОВАНІЕ МІРОВЪ. Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. Имп. Юрьев. Унив. *К. Д. Покровскаго*. VIII+200 стр. 8°. Съ 60 рис. Ц. 1 р. 75 к. *).

Книга чрезвычайно интересна и богата содержаніемъ.

Педагогическій Сборникъ.

20. **В. Ф. Каганъ**, прив.-доц. ЗАДАЧА ОБОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ ВЪ СОВРЕМЕННОЙ ПОСТАНОВКѢ. Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи на степень магистра чистой математики 35 стр. 8°. Съ 11 чертеж. 1908 г. Ц. 35 к.

21. **В. Циммерманъ**. проф. ОБЪЕМЪ ШАРА, ШАРОВОГО СЕГМЕНТА и ШАРОВОГО СЛОЯ. 34 стр. 16°. Ц. 25 к.

Распространеніе подобнаго рода элементарныхъ монографій среди учащихся весьма желательно. *Русская Школа.*

22 **А. Риги**. проф. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРИРОДА МАТЕРІИ. Вступительная лекція. Пер. съ итал. 28 стр. 8°. 1908. *Изд. 2-е* Ц. 30 к.*).

Эта прекрасная рѣчь обладаетъ всѣми преимуществами многочисленныхъ популярныхъ сочиненій знаменитаго профессора Болонь-скаго университета. *Ж. М. Н. Пр.*

23. **О. Леманъ**, проф. ЖИДКІЕ КРИСТАЛЛЫ и ТЕОРІИ ЖИЗНИ. Пер. съ нѣм. *П. В. Казанецкаго.* IV+43 стр. 8°. Съ 30 рис. Ц. 40 к.

...весьма кстати является сводка главныхъ фактовъ, сдѣланная проф. Леманомъ. *Педагог. Сборн.*

24. **Г. Гейбергъ**. проф. НОВОЕ СОЧИНЕНІЕ АРХИМЕДА. Посланіе Архимеда къ Эратосѳену о нѣкоторыхъ вопросахъ механики. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* XV+27 стр. 8°. Съ 15 рис. Ц. 40 к. *).

Математикамъ... будетъ весьма интересно познакомиться съ новой драгоцѣнной научной находкой... *Образованіе.*

25. **Б. П. Вейнбергъ**, прив.-доц. СНѢГЪ, ИНЕЙ, ГРАДЪ, ЛЕДЪ и ЛЕДНИКИ. IV+127 стр. 8°. Съ 138 рис. и 2 фототип. табл. Ц. 1 р.*)

„Матезисъ“ можетъ гордиться этимъ изданіемъ. *Ж. М. Н. Пр.*

26. **Г. Ковалевскій**, проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ИСЧИСЛЕНІЕ БЕЗКОНЕЧНО МАЛЫХЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. пр.-доц. *С. Шатуновскаго.* VIII+140 стр. 8°. Съ 18 черт. Ц. 1 р.*).

Книга проф. Ковалевскаго, несомнѣнно, прекрасное введеніе въ высшій анализъ. *Русская Школа.*

27. **Томпсонъ, Сильванусъ**. ДОБЫВАНІЕ СВѢТА. Общедоступная лекція для рабочихъ, прочит. на собраніи Брит. Ассоціаціи. 1906. Пер. съ англ. VIII+88 стр. 16°. Съ 28 рис. Ц. 50 к.*).

Въ этой весьма интересно составленной рѣчи собранъ богатый матеріалъ по вопросу добыванія свѣта. *Ж. М. Н. Пр.*

28. **А. Слаби,** проф. РЕЗОНАНСЪ и ЗАТУХАНІЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХЪ ВОЛНЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. *Вьстн. Оп. Физ. и Элем. Матем.* 42 стр. 8°. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

29. **К. Снайдеръ,** КАРТИНА МІРА ВЪ СВѢТѢ СОВРЕМЕННАГО ЕСТЕСТВОЗНАНІЯ. Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+193 стр. 8°. Съ 16 отд. портрет. Ц. 1 р. 50 к.

Книга касается интереснѣйшихъ вопросовъ о природѣ.

Педаг. Сборн.

30. **В. Рамзай,** проф. БЛАГОРОДНЫЕ и РАДІОАКТИВНЫЕ ГАЗЫ. Пер. подъ ред. *Вьстн. Опытн. Физ. и Эл. Мат.* 37 стр. 16°. Съ 16 рис. Ц. 25 к.

31. **К. Бруни,** проф. ТВЕРДЫЕ РАСТВОРЫ. Пер. съ итал. подъ ред. *Вьстн. Опытн. Физ. и Эл. Матем.* 37 стр. 16°. Ц. 25 к. *)

32. **Р. С. Боллъ,** проф. ВѢКА и ПРИЛИВЫ. Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* 104 стр. 8°. Съ 4 рис. и 1 табл. Ц 75 к.

Настоящее изданіе „Mathesis“ слѣдуетъ привѣтствовать, наравнѣ съ прочими, какъ почтенный, заслуживающій распространенія и серьезнаго вниманія, вкладъ въ русскую науку. *Русская школа.*

33. **А. Слаби,** проф. БЕЗПРОВОЛОЧНЫЙ ТЕЛЕФОНЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. *Вьстн. Оп. Физ. и Эл. Матем.* 28 стр. 8°. Съ 23 рис. Ц. 30 к.

34. **Ф. Линдеманъ.** СПЕКТРЪ и ФОРМА АТОМОВЪ Рѣчь ректора Мюнхенск. унив. Перев. съ нѣм. 23 стр. 16°. Изд. 2-ое. Ц. 15 коп.

35. **Л. Кутюра.** АЛГЕБРА ЛОГИКИ. Пер. съ фр. съ прибавленіями проф. *И. Слешинскаго.* 128 стр. 8°. Ц. 90 к.

36. **Веберъ и Вельштейнъ,** проф. ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРІИ. Т. II, кн. I. Основанія геометріи. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *В. Ф. Кагана.* VIII + 362 стр. 8°. Съ 144 черт. и 5 рис. Ц. 3 р.

37. **Г. Лоренцъ,** проф. КУРСЪ ФИЗИКИ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.* *)

Т. I. VIII + 348 больш. стр. 8°. Съ 236 рис. 1910. Ц. 2 р. 75 к.

Т. II. VIII+465 больш. стр. 8°. Съ 256 рис. 1910. Ц. 3 р 75 к.

Съ появленіемъ этого перевода русская литература обогатилась превосходнымъ курсомъ физики. *Ж. М. Н. Пр.*

38. **В. А. Гернетъ.** ОБЪ ЕДИНСТВѢ ВЕЩЕСТВА. 46 стр. 16°. Ц. 25 коп.

39. **П. Зееманъ,** проф. ПРОИСХОЖДЕНІЕ ЦВѢТОВЪ СПЕКТРА. Съ приложеніемъ статьи *В. Ритца:* „ЛИНЕЙНЫЕ СПЕКТРЫ и СТРОЕНІЕ АТОМОВЪ“. 50 стр. 16°. Ц. 30 к.

40. **С. Ньюкомъ**, проф. ТЕОРІЯ ДВИЖЕНІЯ ЛУНЫ. (Исторія и современное состояніе этого вопроса) 26 стр. 16°. Ц. 20 к.

41. **А. Клоссовскій**, проф. ОСНОВЫ МЕТЕОРОЛОГІИ XVI+527 стр. б льш. форм. 8°. Съ 199 рис., 2 цвѣтн. и 3 черн. табл. 1910. Ц. Р. 4. *)

Честь и слава „Mathesis“ за изданіе этой прекрасной книги, которою можетъ гордиться русская наука! *Ж. М. Н. Пр.*

42. **Ф. Кэджори**, проф. ИСТОРІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (съ нѣкоторыми указаніями для препод.). Перев. съ англ. подъ ред. и съ примѣч. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* XII+368 стр. 8°. Съ рис. 1910. Ц. 2 р. 50 к. *)

Мы настоятельно рекомендуемъ „Исторію элемент. мат.“ Кэджори. *Вѣстн Воспитанія*

43. **В. Рамзай**, проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ИЗУЧЕНІЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ХИМІИ. Перев. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* IV+75 стр. 16°. 1910. Ц. 40 к.

44. **С. Роу**. ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ УПРАЖНЕНІЯ СЪ КУСКОМЪ БУМАГИ. Пер. съ англ. XVI+173 стр. 16°. Съ 87 рис. и чертежами. 1910. Ц. 90 к.

45. **Р. Нимфюръ**. ВОЗДУХОПЛАВАНІЕ. Научныя основы и техническое развитіе. Пер. съ нѣм. IV+161 стр. 8°. Съ рис 1910 Ц 90 к.*)

46. **Дж. Дж. Томсонъ**, проф. КОРПУСКУЛЯРНАЯ ТЕОРІЯ ВЕЩЕСТВА. Перев. съ англ. *І. Левинтова*, подъ ред. *„Вѣстн. Оп.. Физ. и Эл. Мат.“.* VIII+162 стр. 8°. Съ 29 рис. 1910. Ц. 1 р. 20 к.

47. **К. Граффъ**. КОМЕТА ГАЛЛЕЯ. VIII+71 стр. 16°. Съ 15 рис. Изданіе второе, исправл. и дополненное. 1910. Ц. 30 к. *)

48. ГАЛЛЕЕВА КОМЕТА ВЪ 1910 ГОДУ. Общедоступное изданіе. Содержаніе: О вселенной.—О кометахъ.—О кометѣ Галлея. 32 стр. Съ 12 иллюстраціями. 1910. Ц. 12 к.

49. **Г. Кайзеръ**. СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТІЕ СПЕКТРОСКОПІИ. Пер. съ нѣм. подъ ред. *Вѣстн. Оп. Физ. и Элем. Мат.* 45 стр. 16°. 1910. Ц. 25 к. *)

50. **Гампсонъ-Шефферъ**. ПАРАДОКСЫ ПРИРОДЫ. Книга для юношества, объясняющая явленія, которыя находятся въ противорѣчіи съ повседневнымъ опытомъ. Пер. съ нѣм. VIII+193 стр. 8°. Съ 69 рис. Ц. 1 р. 20 к. *)

51. **В. Каганъ**. прив.-доц. ЧТО ТАКОЕ АЛГЕБРА? 72 стр. 16°. 1910. Ц. 40 к. *)

52. **Веберъ и Вельштейнъ**. проф ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. Т. II, кн. 2 и 3. Тригонометрія, аналитическая геометрія и стереометрія. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* 1910. VIII+322 стр. 8°. Съ 109 рис. Ц. 2 р. 50 к.

53. **Г. Пуанкаре**, проф. НАУКА и МЕТОДЪ. Пер. съ фр. И. Брусиловскаго подъ ред. пр.-доц. *В. Кагана*. VIII+384 стр. 16°. 1910. Ц. 1 р. 50 к.

54. **Дж. Лёбъ**, проф. ДИНАМИКА ЖИВОГО ВЕЩЕСТВА. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В В. Завьялова*. VIII+352 стр. 8°. Съ 64 рис. 1910. Ц. 2 р. 50 к

55. **А. Адлеръ**. ТЕОРІЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ПОСТРОЕНІЙ Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*. XXIV+325 стр. 8°. Съ 177 рис 1910. Ц. 2 р. 25 к.

56. **Ф. Содди**, проф. РАДІЙ и ЕГО РАЗГАДКА. Пер. съ англ. подъ ред лабор. Новоросс. унив. *Л. Хмырова*. VII+190 стр. 8°. Съ 31 рис. 1910. Ц. 1 р. 25 к.

57. **А. Смитъ**. проф. **Введеніе въ неорганическую химію**. Пер. съ англ. подъ ред, проф. *П. Г. Меликова*. Вып. I. VI+400 стр. 8°. Съ рис. 1911. Ц. Р. 2. — Вып. II выйдетъ въ январѣ 1911 г.

58. **Г. Ковалевскій**. проф. **Основы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій**. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. Шатуновскаго*. VII+503 стр. 8°. 1911. Ц. 3 р. 50 к.

59. **Э. Борель**. проф. **Элементарная математика**. Ч. I. Ариѳметика и Алгебра. Въ обработкѣ проф. *П. Штэккеля*. Пер. съ нѣмец. подъ ред. прив.-доц. *В. Ф. Кагана* Съ приложеніемъ его статьи „О реформѣ преподаванія математики“. LXIV+434 стр. 8°. 1911. Ц. Р. 3.—

60. **О Винеръ**, проф. **О цвѣтной фотографіи** и родственныхъ ей естественно-научныхъ вопросахъ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина*. VI+69 стр. 8°. Съ цвѣтн. таблицами. 1911. Ц. 60 к.

61. **А. Марковъ**, акад. **Исчисленіе конечныхъ разностей**. Въ 2-хъ част. Изд. 2-ое, исправ. и дополн. VIII+274 стр. 8°. 1911. Ц. 2 р. 25 к.

62. **Фурнье-Дальбъ. Два новыхъ міра** (Инфра-міръ. Супрамірь) Пер. съ англ. VIII+119 стр. 8°. Съ 1 рис. и 1 табл. Ц. 80 к.

63. **Браунъ Ф.** проф. **Мои работы по безпроволочной телеграфіи и по электрооптикѣ**. Рѣчь, произнесенная по случаю полученія Нобелевской преміи, съ дополн. автора. Пер. съ рукописи *Л. Мандельштама* и *Н. Папалекси*, со вступит. статьей переводчиковъ. XIV—92 стр. 16°. Съ 25 рис. и портретомъ автора. 1911. Ц. 70 к.

64. **Г. Шубертъ**, проф. **Математическія развлеченія и игры** Пер. съ нѣм. *І. Левинтова* подъ ред., съ прим. и добавл. „В. Оп. Ф. и Эл. Мат.“ XII+354 стр. 16°. Со многими табл. Ц. 1 р. 40 к.

Имѣются на складѣ:

Мультонъ Ф., проф. ЭВОЛЮЦІЯ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ. Пер. съ англійск. IV+82 стр. 16°. Съ 12 рис. 1908. Ц. 50 к.
Изложеніе гипотезы образованія солнечной системы изъ спиральной туманности съ попутной критикой космогонической теоріи Лапласа.

Печатаются и готовятся къ печати:

Клейнъ, Ф. Лекціи по элементарной математикѣ.
Трельсъ-Лундъ. Небо и міровоззрѣніе въ круговоротѣ временъ.
Ловель, П. Обитаемость Марса.
Андуайе. Курсъ астрономіи.
Мамлокъ, Л. Стереохимія.
Гассертъ. Изслѣдованія полярныхъ странъ.
Рудіо. Архимедъ, Гюйгенсъ, Лагранжъ и Ламбертъ о квадратурѣ круга.
Успѣхи физики. Выпускъ второй.
Лоджъ, Оливеръ. Міровой эѳиръ.
Морэнъ. Физическія состоянія вещества.
Дзіобекъ. Курсъ аналитической геометріи.
Русская математическая библіографія въ 1908 г. Ред. проф. Д. Синцовъ.
Кларкъ. А. Исторія астрономіи XIX столѣтія.
Штокъ-Штелеръ. Практическое руководство по количественному псорганическому анализу.
Вериго, Б. Ф. Основы общей біологіи. Около 30 печатныхъ листовъ.
Гротъ. Введеніе въ химическую кристаллографію.
Лагранжъ, Ж. Дополненія къ „Элементамъ алгебры“ Эйлера. Неопредѣленный анализъ.
Больцано, Б. Парадоксы безконечнаго.
Бахманъ. Основы новѣйшей теоріи чиселъ.
Планкъ. Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію.

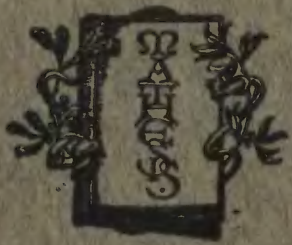
Подробный каталогъ изданій высылается по требованію безплатно.

Выписывающіе изъ главнаго склада изданій „МАТЕЗИСЪ“ (Одесса, Новосельская, 66) **на сумму 5 р. и болѣе за пересылку не платятъ.**

Отдѣленія склада изданій „Mathesis“: Въ **Москвѣ**—Книжный магазинъ **„Образованіе“**, Кузнецкій мостъ, 11. Въ **С.-Петербургѣ**—Книжный магазинъ **Г. С. Цукермана,** Александровская пл., 5. Въ **Варшавѣ**—Книжный магазинъ **„Оросъ“**, Новый Свѣтъ, 70. Въ **Кіевѣ**—Книжный магазинъ **В. А. Просяниченко,** Фундуклеевская.

http://rutracker.org

925



1 р. 40 к.